Az $n$ könyvet $n!$ különböző módon rakhatjuk fel a polcra. A kedvező esetek összeszámolása érdekében képzeletben kötözzük össze felrakás előtt a kedvenc könyveket. Az így kapott egységet a többi $(n-k)$ könyvvel együtt összesen $(n-k+1)!$ különböző sorrendben tehetjük a polcra. Összekötés előtt a kedvenc könyvek sorrendje $k!$-féleképpen alakítható ki, tehát a kedvező esetek száma $k!(n-k+1)!$. Így a keresett valószínűség:

$$P(k)=\frac{k!(n-k+1)!}{n!}.$$

Ez eggyel egyenlő – tehát maximális –, ha $k=1$, vagy $k=n$. A minimum helyének meghatározása érdekében vizsgáljuk meg, melyek azok a $k$ értékek, amelyekre $P(k)>P(k+1)$. Mivel

$$\frac{P(k)}{P(k+1)}=\frac{k!(n-k+1)!}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{n-k+1}{k+1},$$

$P(k)$ akkor és csakis akkor nagyobb $P(k+1)$-nél, ha $(n-k+1)>(k+1)$, azaz ha $2k<n$. Ha $2k=n$ (ami csak páros $n$ mellett fordulhat elő), akkor $P(k)=P(k+1)$, ha pedig $2k>n$, akkor $P(k)<P(k+1)$. Ha tehát $n$ páros, akkor $k=\dfrac{n}{2}$-ig $P(k)$ monoton fogy, a $P\left(\dfrac{n}{2}\right)=P\left(\dfrac{n+2}{2}\right)$ értékek minimálisak, ezt követően $P(k)$ monoton nő. Ha pedig $n$ páratlan, a minimuma $k=\dfrac{n+1}{2}$ értékhez tartozik. Közben azt is beláttuk, hogy $P(1)>P(2)$ és $P(n-1)<P(n)$, tehát a $k=1$, $n$ értékeken kívül más maximális érték nincs.

Kivételt képeznek az $n=1$, $n=2$ esetek, hiszen ekkor csak egy, illetve két egyenlő $P(k)$ értékünk van, tehát szélső értékről nem beszélhetünk.

*Bőősi Imre* (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., III. o. t.)

*Megjegyzés.* Nem beszéltünk a $k=0$ esetről, ha ezt is megengedjük, $P(k)$ értéke itt is maximális. Tulajdonképpen az is vitatható, hogy $k=1$ mellett a kedvenc könyveink„egymás mellé” kerülnek-e. A feladat szövege inkább a $k>1$ feltételt sugallja, ekkor természetesen $n>1$, és csak $k=n$ mellett van maximum.