

$$(1) \quad (\log_x 3) \cdot (\log_{3x} 3) \geq \log_{9x} 3.$$

Mivel a logaritmusfüggvény alapja csak 1-től különböző pozitív szám lehet, (1) eleve csak olyan x -re teljesülhet, amely mellett x , $3x$, $9x$ ilyen, azaz

$$(2) \quad x > 0, \quad \text{és} \quad x \neq 1, \quad x \neq \frac{1}{3}, \quad x \neq \frac{1}{9}.$$

A logaritmus definíciójából következik, hogy ha $\log_a b$ értelmezve van, és 0-tól különbözik, akkor $\log_b a$ is értelmezve van, és egyenlő az előbbi reciprokéval. Ezt felhasználva, és az

$$(3) \quad y = \log_3 x$$

jelölést bevezetve kapjuk, hogy (1) ekvivalens az

$$\frac{1}{y(y+1)} \geq \frac{1}{y+2}$$

egyenlőtlenséggel. Ebből rendezéssel az

$$(4) \quad \frac{(y - \sqrt{2})(y + \sqrt{2})}{y(y+1)(y+2)} \leq 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A (4) bal oldalán álló tört akkor negatív, ha a tényezői között a negatívak száma páratlan, azaz a

$$-2, \quad -\sqrt{2}, \quad -1, \quad 0, \quad \sqrt{2}$$

számok közül páratlan sok nagyobb y -nál. Így van ez, ha mind nagyobb y -nál: $y \leq -2$, vagy ha három nagyobb közülük y -nál: $-\sqrt{2} < y < 1$, és ha csak a legnagyobbikuk nagyobb y -nál: $0 < y < \sqrt{2}$. Ezekhez még hozzá kell venni az $y = \pm\sqrt{2}$ értékeket, ahol (4) bal oldala 0-val egyenlő, így kapjuk (4) összes megoldását:

$$y < -2; \quad -\sqrt{2} \leq y < -1; \quad 0 < y \leq \sqrt{2}.$$

Ebből (3) alapján kapjuk (1) megoldását:

$$0 < x < 3^{-2}; \quad 3^{-\sqrt{2}} \leq x < 3^{-1}; \quad 1 < x \leq 3^{\sqrt{2}}.$$

(Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, az eredményt nem kell ellenőrizni.)