

## Számelmélet II.

1. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan egész szám van, amely felírható két köbszám különbségként, de nem írható fel két köbszám összegeként.

2. Legyen  $k$  tetszőleges egész szám. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan  $m$  pozitív egész szám van, amihez található  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$  számok úgy, hogy

$$k = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \dots + \varepsilon_m m^2$$

és minden  $\varepsilon_j = \pm 1$ .

3. Igazoljuk, hogy ha  $p$  prímszám és  $a, b$  olyan egészek, amelyekre

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{b},$$

akkor  $p|a$ . Igaz-e az is, hogy  $p^2|a$ ?

4. Bizonyítsuk be, hogy ha  $n$  és  $k$  pozitív egész, akkor

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+k}$$

nem lehet egész.

5. Adott a  $k$  természetes szám. Igazoljuk, hogy akkor és csak akkor van hozzá olyan  $a$  és  $b$  egész, amelyre  $k = a^2 + 3b^2$ , ha van hozzá olyan  $c$  és  $d$  egész, amelyre  $k = c^2 + cd + d^2$ .

6. Legyen  $n > 1$ , páratlan egész. Megadhatók-e  $a_1, a_2, \dots, a_n$  különböző egészek úgy, hogy az  $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) + 1$  polinom két kisebb fokú racionális együtthatós polinom szorzatára bomlik?

Mi a helyzet az  $(x - a_1)^2 \cdot (x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1$  polinommal?

7. Igazoljuk, hogy tetszőleges  $m$  természetes számhoz végtelen sok olyan  $k$  természetes szám van, amelyre megadható  $k$  egész úgy, hogy azok  $m$ -edik hatványának reciprok összege éppen 1.

8. Legyen  $a$  és  $b$  egymáshoz relatív prím pozitív egész. Hány olyan  $n$  természetes szám van, amelyre az  $ax + by = n$  egyenletnek nincs nem negatív  $x, y$  egész megoldása?