Első forduló

1. Síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcspontjai: $A(0;8)$, $B(6;0)$ és $C(x;12)$. Mekkora az x, ha tudjuk, hogy $0<x<6$, és az ABC háromszög területe 20?

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\sin^2 x = \sin y, \tag{1}$$

$$\cos^4 x = \cos y, \tag{2}$$

egyenletekből álló egyenletrendszert!

3. Antal, Béla, Csaba, Dezső és Elemér olyan játékot játszanak, amelyben mindegyik játékos béka vagy kenguru. A békák állításai mindig hamisak, ezzel szemben a kenguruk mindig igazat mondanak.

(1) Antal azt mondja, hogy Béla kenguru.
(2) Csaba azt mondja, hogy Dezső béka.
(3) Elemér azt mondja, hogy Antal nem béka.
(4) Béla azt mondja, hogy Csaba nem kenguru.
(5) Dezső azt mondja, hogy Elemér és Antal különböző fajtájú állatok a játékban.

Hány béka van az öt fiú között?

4. Egy apa minden pénzét gyermekeire hagyta a következő végrendelet szerint:
a legidősebb kapjon 10 000 Ft-ot és a maradék egytized részét,
a második kapjon 20 000 Ft-ot és az *új* maradék egytized részét,
a harmadik kapjon 30 000 Ft-ot és az *új* maradék egytized részét, és így tovább. Ily módon mindegyik gyermek ugyanannyi pénzt kapott.

Hány gyermeke volt az apának?

5. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész számokból álló x, y számpárt, amely kielégíti a

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{x^3-1}{x^3+1}=\frac{y^3-1}{y^3+2}$$

egyenletet!

6. Mely valós y értékek esetén teljesül az

$$x^2\log_2\frac{4(y+1)}{y}+2x\log_2\frac{2y}{y+1}+\log_2\frac{(y+1)^2}{4y^2}>0$$

egyenlőtlenség minden valós x-re?

7. Adjunk meg n pozitív egész számból álló halmazt úgy, hogy bármely kettőt, vagy bármely hármat, …, vagy bármely $(n-1)$-et választva ki a halmaz elemei közül, a kiválasztott számoknak mindig van 1-nél nagyobb közös osztójuk; de a halmaz összes elemének nincs 1-nél nagyobb közös osztója!

8. Az $SABC$ tetraéderen az ASB, BSC és CSA háromszögek egyike sem derékszögű. Az ASB lap S csúcshoz nem tartozó magasságainak talppontja A_1 és B_1, hasonlóképpen a BSC lap S csúcshoz nem tartozó magasságainak talppontja B_2 és C_2, végül a CSA lap S csúcshoz nem tartozó magasságainak talppontja C_3 és A_3. Bizonyítsuk be, hogy van olyan egyenes, amely merőleges az A_1B_1, B_2C_2 és C_3A_3 egyenesek mindegyikére!

A második forduló feladatai

I. kategória

1. Oldjuk meg az

$$\left[\frac{x-2}{3}\right]+\left[\frac{1}{x}\right]=\frac{2x^2-3x-1}{x}$$

egyenletet a pozitív valós számok halmazán!

(Itt $[k]$ jelenti a valós k szám egész részét: azt a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb k-nál, tehát $k-1<[k]\leqq k$.)

2. Jelöljünk ki az ABC háromszög belsejében egy P pontot, és a P ponton át húzzunk párhuzamosokat a háromszög oldalaival! Ezek a háromszöget három paralelogrammára és három háromszögre osztják, amelyek együttvéve (hézagmentesen és) átfedés nélkül befedik az ABC háromszöget. Hogyan kell kitűzni a P pontot, hogy a részháromszögek területének összege harmadrésze legyen az ABC háromszög területének?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív egész számot jelent, akkor 2^n+3^n nem lehet négyzetszám!

II. kategória

1. Bizonyítsuk be, hogy ha p és q olyan pozitív számokat jelentenek, amelyeknek összege 1-gyel egyenlő, akkor

$$\left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2\geqq\frac{25}{2}.$$

Mely esetben érvényes az egyenlőség?

2. Adott az O középpontú és r sugarú K kör, valamint az e egyenes, amely K-t az (egymástól különböző) P és Q pontban metszi. Legyen k olyan kör, amely egyrészt kívülről érinti K-t, mégpedig a nem nagyobb PQ ív valamely belső pontjában, másrészt érinti az e egyenest!

Bizonyítsuk be, hogy a nem nagyobb PQ ív F felezőpontjából a k körhöz vont érintőszakasz hossza független k-tól!

3. Az $ABCD$ tetraéder csúcspontjai egy egységnyi térfogatú egyenes körhenger határoló lapjain helyezkednek el. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ tetraéder térfogata nem nagyobb $\frac{2}{3\pi}$-nél! Mely esetben egyenlő $\frac{2}{3\pi}$-vel?

III. kategória

1. Bizonyítsuk be, hogy az a és b pozitív egészek $\frac{a}{b}$ hányadosa akkor és csak akkor egyenlő két természetes szám reciprokának összegével, ha van a b-nek két olyan (nem feltétlenül különböző) osztója, amelyek összege az a-nak egész számú többszöröse.

2. Legyenek A és B a k kör belsejében az O körközéppontra szimmetrikus pontok. Vegyünk fel a k körön kívül egy tetszőleges P pontot, amelynek A-tól és B-től mért távolságaira $PA \leqq PB$. A PA átmérőjű t körnek a k körrel képezett metszéspontjait jelölje M és N. Igazoljuk, hogy $MPA\sphericalangle = BPN\sphericalangle$.

3. Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenletet:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^4}{4} + \ldots + \frac{x_n^{2n}}{2^n} + \frac{1}{2^n}.$$

IV. kategória

1. Határozzuk meg az összes olyan korlátos $f : Z \to Z$ függvényt (Z az egész számok halmaza), amely minden egész k és n esetén kielégíti az

$$f(k+n) + f(k-n) = 2f(k) \cdot f(n)$$

egyenletet!

2. Adott egy háromszög a síkon. Szerkesszük meg a háromszög belsejében mindazon pontok halmazát, amelyeknek az oldalegyenesektől mért távolság összege a háromszög három magassága hosszának számtani közepe!

3. Adott n^2 különböző valós szám. Ezeket egy $n \times n$-es táblázatban rendeztük el. Bekarikázzuk minden oszlopban a legnagyobbat és minden sorban a legkisebbet. Hány olyan elrendezés van, amelyben $2n$ különböző számot karikáztunk be?