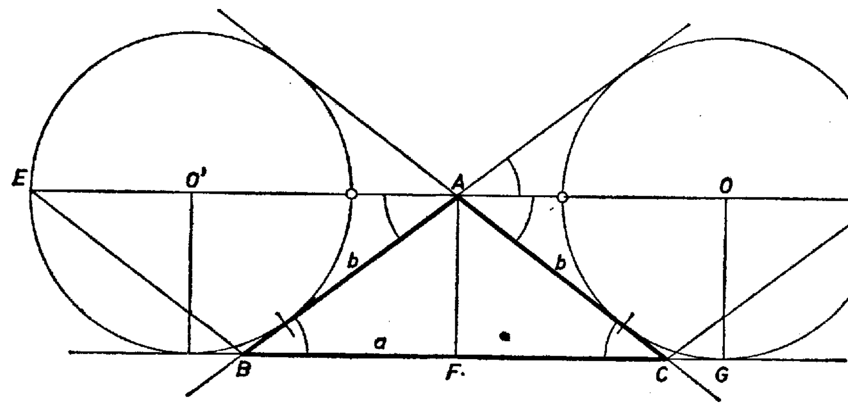
A paralelogrammákban $AD\#BC\#EA$ (az irányt is beleértve), tehát D és E egymás tükörképei A-ra mint centrumra.

A két kör bele van írva a BAC (180°-nál kisebb) szögtartománynak abba a két mellékszögtartományába, amely vele az AB, illetve AC félegyenes mentén szomszédos; e két tartomány egymásnak csúcsszögtartománya. Így a két kör egymás képe egy A centrumú, valamilyen arányú hasonlósági transzformációban, továbbá az előbbiek szerint az egymás meghosszabbítását adó AD, AE félegyenesek is egymás képei.



Az AD félegyenes a D-n átmenő hozzáírt kört másodszor A és D között metszi, mert az ellentétes esetben az $ABCD$ paralelogrammának és a körnek D lenne az egyetlen közös pontja, így pedig a kör nem érinthetné a paralelogramma belsejében levő AC szakaszt. Ugyanígy E is A-tól távolabbi metszéspontja az AB oldalhoz hozzáírt körnek és az AE félegyenesnek.

Ezek szerint a D és E pontok is egymás megfelelői a mondott centrális hasonlóságban, tehát $DA = EA$ alapján a nagyítási arány 1, a két kör sugara egyenlő. Ezért az O, O' középpontjaikat összekötő egyenes párhuzamos BC-vel, másrészt áthalad A-n, hiszen ez az egyenes a háromszög A-nál levő külső szögeinek a felezője, és ezen van D is, E is. Így a félszögek váltószögeiként $ABC\sphericalangle = ACB\sphericalangle$, az ABC háromszög egyenlő szárú: $AB = AC$, szögeinek kiszámításához elég meghatároznunk alapjának és szárának arányát.

Legyen a BC alap felezőpontja F, az AC oldalhoz hozzáírt kör érintési pontja a BC oldal meghosszabbításán G. Ekkor – mint ismeretes – BG egyenlő az ABC háromszög kerületének felével, és az oldalak, szögek szokásos jelöléseivel

$$a = BC = AD = AO + OD = FG + OG = (BG - BF) + AF = \frac{a+2b}{2} - \frac{a}{2} + \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}},$$

$$(a-b)^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}, \quad (a \neq 0)$$

$$\frac{a/2}{b} = \cos\beta = \frac{4}{5}, \quad \beta = \gamma = 36°52', \quad \alpha = 106°16'.$$

Ezzel a megoldást befejeztük.

Megjegyzés. Szokás az $ABCD$ paralelogramma D csúcsát az ABC háromszög (egyik) külső súlypontjának nevezni, ugyanis itt van a tömegpontrendszer súlypontja, ha A-ba és C-be $(+1)$ tömeget és B-be (-1) tömeget gondolunk. Ebben a szóhasználatban a feladat föltevésének egyik része így mondható ki: a B-vel szemben fekvő oldalhoz hozzáírt külső érintő kör átmegy a B-vel szemben fekvő külső súlyponton.

Ezek után rámutathatunk a feladat eredetére. Lapunk 1966. évi pályázatának tárgya az olyan háromszögek több irányú vizsgálata volt, melyeknek *beírt* köre átmegy a súlyponton. Egy ilyen háromszöget vizsgált egy további érdekesség mellett az 1805. feladat, [1] és annak kapcsán merült fel az általánosítás kérdése, külső súlypontra, külső érintő körre. Ezúttal nem numerikus könnyítést vettünk, hanem egyenlő szárú háromszöget (két külső súlypont révén). – Az érdeklődőknek ajánljuk a három oldal közti összefüggés megállapítását azzal a követeléssel, hogy a külső érintő körök egyike menjen át a megfelelő külső súlyponton.

[1] Megoldása: K. M. L. 45. (1972) 12.