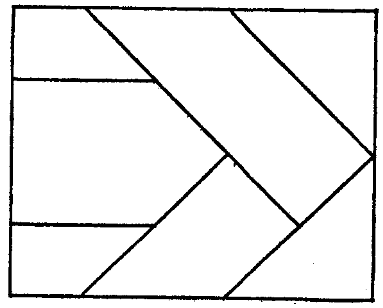
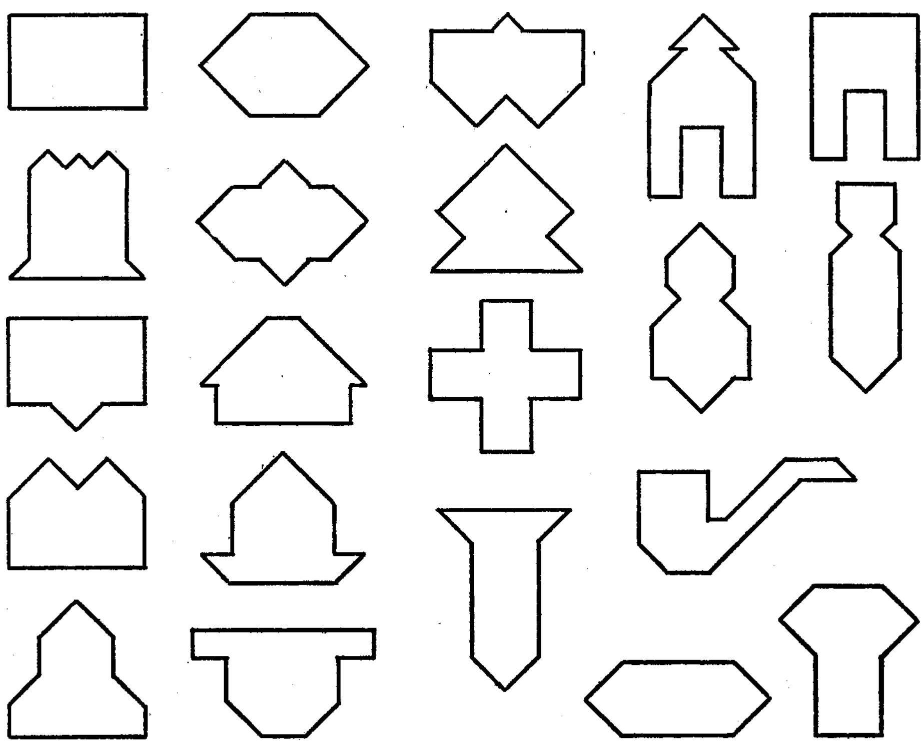
A népszerű „puzzle” összerakós játékoknál egy fényképet vagy reprodukciót cikcakkos vonalak mentén sok-sok, száz, ezer, néha ötezer részre vágnak szét; a feladat a kép újbóli összerakása. A puzzle egy ősi, feltehetően Kínából származó játék, a tangram modernizált és egyszerűsített változata. Az eredeti *tangram* játékban egy téglalapot az 1. ábrán látható módon szétvágunk 7 részre, s a részekből olyan különböző alakzatokat rakunk össze, mint amilyeneket a 2. ábra mutat.

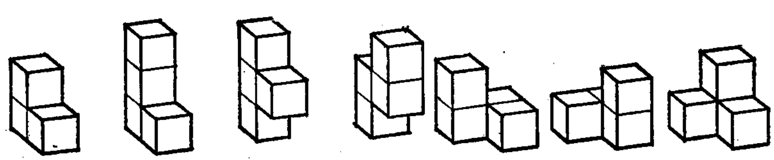


1. ábra



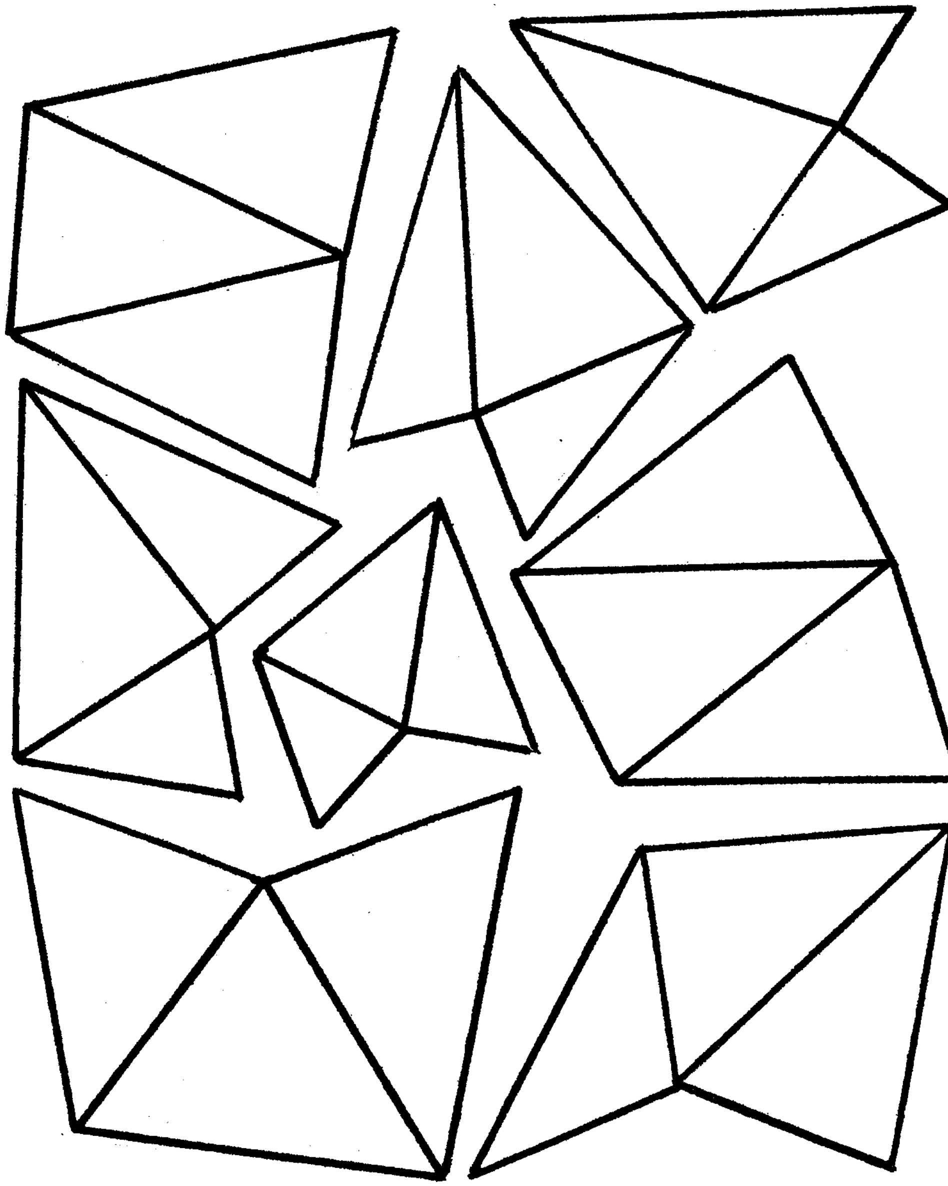
2. ábra

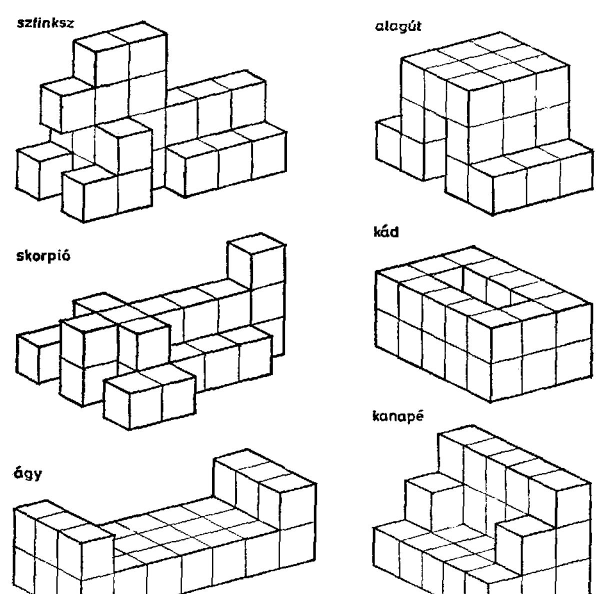
Jóval nehezebbé válik a játék, ha a síkból kilépünk a térbe. A dán *Piet Hein* konstruálta a SOMA (ejtsd: szóma) kockákat, ezek láthatók a 3. ábrán. Az alapfeladat: rakjunk össze egyetlen $3 \times 3 \times 3$-as nagy kockát a hét alakzatból.



3. ábra

Ha a kocka megvan, következhet a többi: a szfinx, a kanapé, az alagút stb. (4. ábra, lásd még 1979. évi áprilisi számunkat és a borító 4. oldalát.)





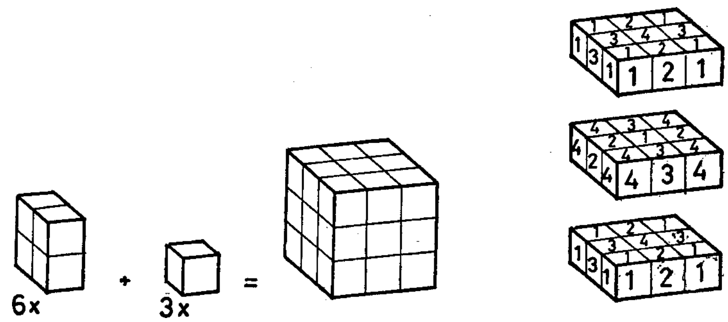
a borító 4. oldalának ábrája

Az alább bemutatott összerakós játéknál nem kisebb kockákból, hanem különböző szabálytalan háromoldalú gúlákból kell egy szabályos tetraédert összerakni. Próbálja meg az olvasó!

Vannak esetek, amikor az összerakást megkönnyíti, ha előtte egy kicsit *elemezzük* a játékot. Ilyen például a következő feladat:

6 darab $2 \times 2 \times 1$-es hasábból és három kis kockából kell egy $3 \times 3 \times 3$-as nagy kockát összeraknunk. (Mielőtt az olvasó tovább folytatná az olvasást, próbálja meg a feladatot önállóan megoldani.)

Tegyük fel, hogy sikerült megoldanunk a feladatot, a $3 \times 3 \times 3$-as kockát összeraktuk a megadott 9 darabból. Színezzük ki a 27 kis kockát négy színnel, ezeket 1, 2, 3 és 4-gyel fogjuk jelölni úgy, ahogy azt az 5. ábra mutatja. (Az ábrán a kocka rétegeit kissé széthúztuk.)

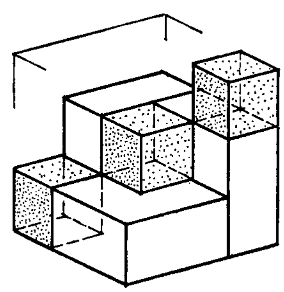


5. ábra

Rövid szemlélődés után mindenki meggyőződhet arról, hogy akárhogyan helyezünk is el egy $2 \times 2 \times 1$-es hasábot, az négy különböző színű kocka helyét foglalja el. Minthogy a 2-es, 3-as és 4-es színű kis kockából egyaránt $6-6$ darab van, a 6 darab hasáb az összes ilyet lefoglalja. Következésképp az $1 \times 1 \times 1$-es elemeket csak olyan helyekre tehetjük, amelyeket 1-es színűre színeztünk.

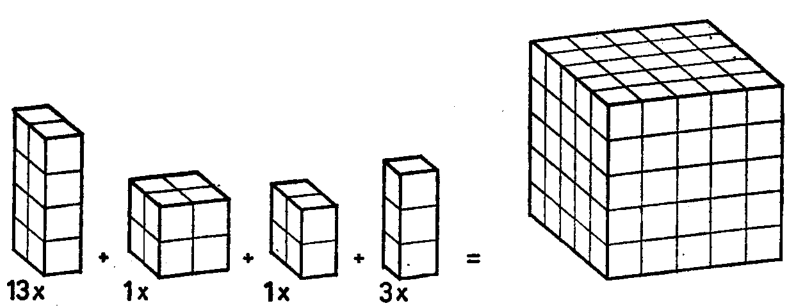
Egy $2 \times 2 \times 1$-es hasáb a kocka bármely $3 \times 3 \times 1$-es rétegéből 4, 2 vagy pedig 0 – vagyis páros számú – helyet foglal le. Csak úgy tudjuk tehát kitölteni mind a 9 helyet, ha minden rétegbe legalább egy $1 \times 1 \times 1$-es kocka is kerül. Ez azt jelenti, hogy a középső szint középső helyére (mint a középső szint egyetlen 1-es színű helyére) kockát kell tennünk, a másik két kis kockát átellenes sarkokba – különben lenne olyan $3 \times 3 \times 1$-es réteg, amibe nem esik kis kocka.

Ennek ismeretében már könnyű összerakni a $3 \times 3 \times 1$-as kockát (6. ábra).



6. ábra

Az az összerakós játék, amit *John Conway,* a neves angol matematikus talált ki, már bonyolultabb, de nem megoldhatatlanul nehéz. A feladat a következő: Rakjunk össze egy $5 \times 5 \times 5$-ös kockát az ábrán látható elemekből.



Az előző meggondolásunkhoz hasonlóan most is a „páratlan” vagyis az $1 \times 1 \times 3$-as hasábokat vesszük szemügyre. Az $5 \times 5 \times 5$-ös kocka minden egyes 5×5-ös rétegéből a másik három fajta idom páros sok helyet foglal le - következésképp a három darab páratlan hasábnak mind a $3 \cdot 5 = 15$ rétegbe ($5-5$ réteg mindhárom irányban) bele kell metszenie. S mivel egy $1 \times 1 \times 3$-as hasáb pontosan 5 réteget metsz, a hasáboknak „kitérőeknek” kell lenniük, például semelyik kettő nem mutathat ugyanabba az irányba. Ez máris jelentősen csökkenti a próbálkozások számát.

1	2	1	2	1
3	4	3	4	3
1	2	1	2	1
3	4	3	4	3
1	2	1	2	1

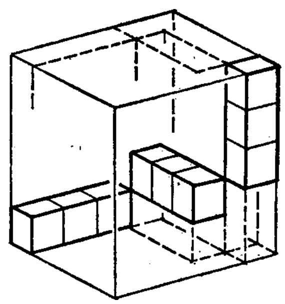
alsó, középső és felső réteg

4	3	4	3	4
2	1	2	1	2
4	3	4	3	4
2	1	2	1	2
4	3	4	3	4

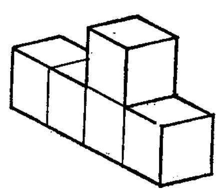
második és negyedik réteg

7. ábra

Az $5 \times 5 \times 5$ kockát újfent négy színnel színezzük meg a 7. ábra szerint. Könnyen beláthatjuk, hogy a „páros" idomok mind a négy színből ugyanannyit foglalnak le, így a „páratlan" hasábok mindegyikének pontosan két 1-es színű kis kockát kell tartalmaznia – azaz két 1-es színű kockát kötnek össze. Innen azután az előző megállapításunk segítségével már egyértelműen megmondhatjuk, hol is kell a „páratlan" hasáboknak lenniük: kígyószerűen tekeredve kötik össze a nagy kocka két szemben fekvő csúcsát (8. ábra). Ha ezt tudjuk, a maradékot már nem nehéz kitölteni a többi idommal.



8. ábra



9. ábra

Igazán nehéz feladat, ha a 2237. gyakorlat 5-kockájának (9. ábra) példányaiból akarunk egy $5 \times 5 \times 5$-ös kockát összerakni. Bár több mint 400 különböző megoldás ismeretes, kitartásra és jó térlátásra van szükség akár egynek a megtalálásához is. S ha már ebből az „5-kockából" 25 példánya van az olvasónak, megpróbálkozhat a következő testek kirakásával is: $2 \times 6 \times 5$, $3 \times 4 \times 5$, $2 \times 4 \times 10$, $2 \times 8 \times 5$, $4 \times 4 \times 5$, $2 \times 11 \times 5$, $4 \times 5 \times 5$, valamint $2 \times 4 \times 15$ (mindegyik kirakható!).

A kevésbé kitartóak részére megmutatjuk az $5 \times 5 \times 5$-ös kocka egy lehetséges összerakását.