Időről időre felröppen a hír, hogy valakinek sikerült körzővel és vonalzóval szöget harmadolnia. Jól tudjuk, hogy egy ilyen szerkesztés valahol biztosan hibás, hisz már több mint száz éve bebizonyították: ez a feladat általában nem oldható meg. A hiba vagy ott lehet, hogy az eljárás – akarva-akaratlan – további segédeszközt is felhasznál; vagy ott, hogy a talált szerkesztés csupán közelítő megoldást ad, illetve csak bizonyos szögek esetén hajtható végre.

A szögek, amelyekről most belátjuk, hogy nem harmadolhatók, olyan derékszögű háromszögek hegyesszögei, amelyekben két oldal aránya egynél nagyobb egész. Remélem, közreadásukkal és a vázolt bizonyításokkal sikerül meggyőznöm a „leendő szögharmadolókat”, hogy a szögharmadolás valóban megoldhatatlan feladat.

Az algebra idevágó fejezetében járatlan olvasók kedvéért a bevezetőben összefoglaljuk a geometriai szerkeszthetőség elméletének számunkra szükséges eredményeit. Ezután következik majd fő eredményünk azon szögek harmadának szerkeszthetőségéről, amelyeknek koszinusza vagy tangense racionális.

Megemlítjük még, hogy bár körzővel és beosztás nélküli vonalzóval általában nem lehet szöget harmadolni, léteznek olyan, további segédeszközöket használó eljárások, amelyek pontos eredményt adnak.

1. Szerkeszthetőség

Az időszámítás előtti V. században a görög geométerek vetettek föl három geometriai problémát; ezek már akkor és a későbbi korokban is megannyi matematikust és műkedvelőt izgattak, de sok-sok éven át kudarcot vallott minden megoldási kísérlet. Ezek:

(1) *Szögharmadolás.* Osszunk egy szöget három egyenlő részre.

(2) A *kocka kettőzése.* Szerkesszük meg annak a kockának az élét, amelynek kétszer akkora a térfogata, mint egy megadott kockáé.

(3) A *kör négyszögesítése.* Szerkesszük meg egy adott körrel egyenlő területű négyzet oldalát.

Több mint 2200 évvel később végül igazolták, hogy egyik szerkesztés sem végezhető el csupán körző és beosztás nélküli vonalzó felhasználásával. Bár a kérdés ilyetén tisztázása után ezek a problémák matematikai szempontból már nem igazán érdekesek, matematikatörténeti jelentőségük igen nagy. A 3. probléma a számfogalom bővítését és pontosabb felépítését kívánta meg, míg az első két feladat „történelmi érdeme”, hogy a megoldás keresése során az algebrai egyenletek gyökei természetének vizsgálatára ösztönözték a kutatókat. Ezek a vizsgálatok vezettek aztán a csoportok és a testek modern elméletéhez.

Az alábbiakban vázlatosan bemutatjuk a szögharmadolás megoldhatatlanságának bizonyítását.

Szerkesztési feladatok esetében rendszerint geometriai objektumok egy adott halmazából kiindulva kell előírt módon előállítanunk egy meghatározott elemet. A feladat analitikus megközelítése során az egyes geometriai elemeket egy-egy számmal, rendezett számpárral, esetleg magasabb dimenziós rendezett szám n-essel jellemezzük. A síkon például egy szakaszt jellemez a hossza, egy pontot a derékszögű koordinátái, egy konvex szöget a koszinusza, egy egyenest két pontja, egy kört a középpontja és a sugara stb.

Geometriai objektumok egy halmazát tehát egy számokból (számpárokból stb.) álló halmazzal adhatjuk meg. A keresett elem megszerkesztése ezek után a szóban forgó elemet meghatározó szám megszerkesztését jelenti. Miután az adott és a keresett számok kapcsolatát egyenlet formájában fejezhetjük ki, a feladat az így talált egyenlet gyökeinek megszerkesztésére vezethető vissza.

Az első feladatban így például adva van egy – feltehetően – hegyesszög c koszinusza, és a szög harmadának x-szel jelölt koszinuszát keressük. A szögharmadolás problémája tehát egyenértékű a

$$4x^3 - 3x = c \qquad (0 < c < 1)$$

egyenlet gyökeinek megszerkesztésével. Hasonlóan a második feladat megoldásához az $x^3 = 2$ egyenlet gyökét kell megszerkesztenünk.

Vizsgáljuk most meg, hogy egy adott számhalmaz elemeiből milyen számok szerkeszthetők körző és vonalzó segítségével. Az α valós számot akkor mondjuk szerkeszthetőnek, ha a megadott számhalmaz elemei által meghatározott szakaszokból véges sok lépésben szerkeszthető $|\alpha|$ hosszúságú szakasz. Egy komplex szám ezután pontosan akkor szerkeszthető, ha mind a valós, mind pedig a képzetes része szerkeszthető.

1. Tétel. *Legyen adott egy, az* 1*-et tartalmazó számhalmaz. Ekkor*

a) *ha α és β szerkeszthetők és $\beta \neq 0$, akkor $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha \cdot \beta$, α/β, és $\sqrt{\beta}$ ugyancsak szerkeszthetők.*

(Az összeadást, a kivonást, a szorzást, valamint a nullától különböző számmal való osztást a továbbiakban racionális műveleteknek nevezzük.)

b) *egy adott számhalmazból kiindulva pontosan azok a számok szerkeszthetők, amelyek az adott számokból véges sok racionális művelettel, illetve négyzetgyökvonással kaphatók meg.*

Az absztrakt algebrában egy, a racionális műveletekre nézve zárt számhalmazt *test*nek hívunk. Ha S egy adott számhalmaz, akkor az S elemeiből véges sok racionális művelettel létrejövő elemek testét jelöljük K_0-lal. Ha most α olyan K_0-beli szám, amelyre $\sqrt{\alpha}$ nincs K_0-ban, akkor az $a + b\sqrt{\alpha}$ alakú számok (a és b K_0-beliek) ugyancsak testet alkotnak; ezt a testet $K_0(\sqrt{\alpha})$-val jelöljük. Ugyanígy, ha ezután β $K_0(\sqrt{\alpha})$-beli, de $\sqrt{\beta}$ már nincs $K_0(\sqrt{\alpha})$-ban, akkor a $c + d\sqrt{\beta}$ (c, d $K_0(\sqrt{\alpha})$-beliek) alakú számok testét $K_0(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$-val jelöljük. Így haladva egyre bővebb testekhez juthatunk. Mármost világos, hogy egy ω szám pontosan akkor szerkeszthető, ha léteznek olyan α, β, …, γ, δ számok, hogy $\alpha \in K_0$, $\beta \in K_0(\sqrt{\alpha})$, …, $\delta \in K_0(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \ldots, \sqrt{\gamma})$ és $\omega \in K_0(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \ldots, \sqrt{\gamma}, \sqrt{\delta})$.

Mint a korábbiakban már említettük, egy c koszinuszú szög harmadának megszerkesztése tulajdonképpen a

$$4x^3 - 3x = c$$

egyenlet gyökeinek a megszerkesztését jelenti. A harmadfokú egyenlet gyökeinek megszerkeszthetőségére vonatkozik az alábbi

2. Tétel. *Legyenek az $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ egyenletben az együtthatók K_0-beliek. Ekkor*
(a) *az egyenlet valamennyi gyöke szerkeszthető, ha van a gyökök között K_0-beli;*
(b) *egyetlen gyök sem szerkeszthető, ha a gyökök egyike sem K_0-beli.*

Ha most létezne olyan eljárás, amellyel tetszőleges szög harmadrészét meg tudnánk szerkeszteni, akkor az alkalmazható volna a $60°$-os szögre is. Mivel $\cos 60° = 1/2$, K_0 ekkor éppen a racionális számok halmaza. A $4x^3 - 3x = 1/2$ egyenletnek viszont nincs racionális gyöke. A 2. Tétel szerint tehát a $\cos 20°$ nem szerkeszthető meg. Általános eljárásunk tehát ebben az esetben csődöt mondana, így nem is létezhet.

2. Racionális koszinuszú szög harmadolása

Legyen most $0 < \varphi < 180°$, és legyen $\cos\varphi = \dfrac{m}{n}$, ahol $n > 0$, m és n pedig relatív prímek. Kiinduló számhalmazunk így most két elemből áll, ezek az 1 és az $\dfrac{m}{n}$, K_0 tehát éppen a racionális számok halmaza. A 2. tétel értelmében φ pontosan akkor harmadolható, ha a

$$4x^3 - 3x = m/n \tag{1}$$

egyenletnek van racionális gyöke. Ha most α/β ($\beta > 0$, α és β relatív prímek) az (1) egy racionális gyöke, akkor $4\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^3 - 3\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) = \dfrac{m}{n}$, vagy másképpen

$$\frac{m}{n} = \frac{\alpha(4\alpha^2 - 3\beta^2)}{\beta^3}. \tag{2}$$

A talált feltétel nem csak szükséges. Ezt mondja ki az alábbi lemma.

1. Lemma. Ha γ $0°$ és $180°$ közé esik, továbbá koszinusza az m/n racionális szám, akkor φ pontosan akkor harmadolható, ha m/n (2) alakban írható, ahol α és β relatív prímek: $\beta > 0$ és $-\beta < \alpha < \beta$.

Bizonyítás. Egyrészt az imént láttuk, hogy ha φ harmadolható, akkor m/n felírható a kívánt alakban.

Megfordítva, ha m/n a (2) alakban írható, akkor α/β gyöke az (1) egyenletnek. A 2. tétel szerint az egyenlet minden gyöke megszerkeszthető. Így viszont a φ harmadrésze is ilyen tulajdonságú.

Megjegyzések. Ha α/β a $4x^3-3x = \alpha(4\alpha^2-3\beta^2)/\beta^3$ egyenlet gyöke, akkor a másik két gyök: $\dfrac{1}{2\beta}(-\alpha\pm\sqrt{3\beta^2 - 3\alpha^2})$. Legyen most $\cos\varphi = \alpha/\beta$. Ekkor az utóbbi két gyök éppen $\cos(\varphi+120°)$ és $\cos(\varphi+240°)$, a φ, $\varphi+120°$ és a $\varphi+240°$ pedig a ψ, a $\psi+360°$ és a $\psi+720°$ szögek harmadrésze (nem feltétlenül a fenti sorrendben).

Miután végtelen sok különböző $\alpha(4\alpha^2 - 3\beta^2)/\beta^3$ alakú racionális szám van, ahol α és β relatív prímek és $|\alpha| < \beta$, ezért végtelen sok olyan szög létezik, amelynek megszerkeszthető a harmadrésze.

3. Tétel. *Nem harmadolhatók azok a szögek, amelyek koszinusza $1/n$ alakú, ahol $n \geqq 2$ egész.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik olyan $n \geqq 2$ egész, amelyre az $1/n$ koszinuszú szög harmadolható. Az 1. lemma szerint ekkor léteznek olyan α és β egészek, amelyekkel

$$\frac{1}{n} = \frac{\alpha(4\alpha^2 - 3\beta^2)}{\beta^3}.$$

Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges.

A kapott feltételből ugyanis $\beta^3 = n\alpha(4\alpha^2 - 3\beta^2)$ adódik. Ekkor α osztója β^3-nek, így α csak 1 vagy -1 lehet, hisz α és β relatív prímek. Ha $\alpha = 1$, akkor $\beta^3 = n(4 - 3\beta^2)$. Miután pedig $\beta > 0$, így az egyetlen lehetőség $\beta = 1$, de ekkor $n = 1$, ami nem lehet. Ha most $\alpha = -1$, akkor $4n/\beta^2 = 3n - \beta$. Különböztessünk most meg két esetet aszerint, hogy $\beta < 2n$, vagy pedig $\beta \geqq 2n$. Az első esetben $\beta^2 < 4$, azaz $\beta = 1$ adódik. Innen $n = -1$ következnék, ami nem lehet. A második esetben pedig $4n/\beta^2 \leqq \dfrac{1}{n} < 1$, ami ellentmond annak, hogy $3n - \beta$ egész szám.

Megjegyzés. Hasonlóan láthatjuk be, hogy a $-\dfrac{1}{n}$ $(n \geqq 2)$ koszinuszú szögek nem harmadolhatók.

3. Racionális tangensű szögek harmadolása

2. Lemma. Ha $0 < \varphi < 90°$, továbbá $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{m}{n}$ racionális szám, akkor φ pontosan akkor harmadolható, ha

$$\frac{m}{n} = \frac{\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)}{\beta(3\alpha^2 - \beta^2)} \tag{3}$$

valamilyen α, β ($\beta > 0$) relatív prím egészekkel.

Bizonyítás. Ha φ harmadolható, akkor a

$$nx^3 - 3mx^2 - 3nx + m = 0 \tag{4}$$

egyenletnek létezik α/β racionális gyöke, és feltehető, hogy $\beta > 0$, továbbá hogy α és β relatív prímek. A $\operatorname{tg} 3y = \dfrac{3\operatorname{tg} y - \operatorname{tg}^3 y}{1 - 3\operatorname{tg}^2 y}$ összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$\frac{m}{n} = \frac{3(\alpha/\beta) - (\alpha/\beta)^3}{1 - 3(\alpha/\beta)^2} = \frac{\alpha(3\beta^2 - \alpha^2)}{\beta(\beta^2 - 3\alpha^2)}.$$

Megfordítva, ha m/n a (3) alakba írható, akkor gyöke (4)-nek. A 2. Tétel szerint pedig (4) valamennyi gyöke megszerkeszthető.

Megjegyzés. Ha α/β gyöke a
$(3\alpha^2 - \beta^2)\beta x^3 - 3(\alpha^2 - 3\beta^2)\alpha x^2 - 3(3\alpha^2 - \beta^2)\beta x + (\alpha^2 - 3\beta^2)\alpha = 0$
egyenletnek, akkor a további gyökök

$$\frac{4\alpha\beta \pm (\alpha^2 + \beta^2)\sqrt{3}}{-3\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{3}\beta}{\beta \pm \sqrt{3}\alpha}.$$

Ha $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\alpha}{\beta}$, akkor a másik két gyök értéke $\operatorname{tg}(\varphi + 120^\circ)$ és $\operatorname{tg}(\varphi + 240^\circ)$.

4. Tétel. *Az $n(> 1)$ egész tangensű szögek nem harmadolhatók.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy φ az állítással ellentétben mégis harmadolható. A 2. lemma szerint ilyenkor

$$n = \frac{\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)}{\beta(3\alpha^2 - \beta^2)}$$

valamely α, β relatív prím egészekkel, továbbá $\beta > 0$. Innen kapjuk, hogy

$$n\beta(3\alpha^2 - \beta^2) = \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2).$$

Miután α és β relatív prímek, α az n-nek osztója. Ha $n = k \cdot \alpha$, akkor

$$\alpha^2(3k\beta - 1) = \beta^2(k\beta - 3). \tag{5}$$

Mármost β és $3k\beta - 1$ is relatív prímek, ezért α^2 osztható kell legyen β-val, ami csak úgy lehet, ha $\beta = 1$. Ezt (5)-be helyettesítve

$$\alpha^2 = \frac{k-3}{3k-1}$$

adódik.

Könnyen látható, hogy $\dfrac{k-3}{3k-1} < 1$, ha $k > \dfrac{1}{3}$ vagy ha $k < -1$. Eszerint csak $k = 0$ vagy pedig $k = -1$ lehetséges. Ha $k = 0$, akkor $\alpha^2 = 3$, ami nem lehet. Végül ha $k = -1$ akkor $\alpha = \pm 1$, a de így $n = \pm 1$, ami ismét ellentmondás. A φ szög tehát nem harmadolható.

Megjegyzések. Hasonló okoskodással látható be, hogy ha egy szög tangense $\pm\dfrac{1}{n}$ vagy $-n$, ahol $n \geqq 2$ egész, akkor a szög nem harmadolható.

A 3. és 4. tételekből végül következik, hogy nem harmadolhatók az olyan derékszögű háromszögek hegyesszögei, amelyekben valamelyik két oldal aránya 1-nél nagyobb egész.

Magyar nyelvű irodalom

Szőkefalvi-Nagy Gyula: A geometriai szerkesztések elmélete (Akadémiai Kiadó, 1968).
Surányi János: A szögharmadolás kérdéséről (Középiskolai Matematikai Lapok 16. kötet 97–107, 129–134. o. 1957.).

Fordította: Fried Katalin matematikus,
ELTE Főiskolai Tanárképző Kar