Először is megállapítjuk, hogy az $S_n(x)$ függvény minden x-re és minden n-re értelmezve van, hiszen a nevezőkben

$$x^2-2x+3=(x-1)^2+2,$$

illetve ennek valamely hatványa áll, és ez soha nem nulla. Másik észrevételünk az, hogy az (1) mértani sor hányadosa nem 1, azaz

$$\frac{x}{x^2-2x+3}\neq 1, \quad \text{hiszen} \quad 1-\frac{x}{x^2-2x+3}=\frac{x^2-3x+3}{x^2-2x+3}>0. \tag{2}$$

Ehhez csak azt kell belátnunk, hogy $x^2-3x+3>0$, ez viszont

$$x^2-3x+3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqq\frac{3}{4}>0 \tag{3}$$

miatt igaz.

Mivel az (1) mértani sor hányadosa nem 1, azért lehet rá alkalmazni a mértani sor összegképletét:

$$S_n(x)=\frac{1}{x^2-2x+3}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{x}{x^2-2x+3}\right)^n}{1-\dfrac{x}{x^2-2x+3}}=\frac{1-\left(\dfrac{x}{x^2-2x+3}\right)^n}{x^2-3x+3}. \tag{4}$$

a) Ha $x>0$, akkor $\left(\dfrac{x}{x^2-2x+3}\right)^n>0$ tetszőleges n-re, következésképpen

$$S_n(x)<\frac{1}{x^2-3x+3}\leqq\frac{4}{3},$$

a (3) szerint. Így $x>0$ és n tetszőleges értéke mellett $S_n(x)<4/3$.

b) Ha $x=0$, akkor $S_n(0)=1/3$ az n értékétől függetlenül, és ez is $<4/3$.

c) Végül ha $x<0$, akkor

$$0>\frac{x}{x^2-2x+3}>-1, \tag{5}$$

hiszen $x^2-x+3>0$, és így $x>-(x^2-2x+3)$. Emiatt tetszőleges n-re

$$\left(\frac{x}{x^2-2x+3}\right)^n\geqq\frac{x}{x^2-2x+3},$$

amiből (4) szerint

$$S_n(x)\leqq\frac{1-\dfrac{x}{x^2-2x+3}}{x^2-3x+3}$$

következik. (5) miatt itt a számláló kisebb, mint 2, és (3) miatt $x<0$ mellett a nevező nem kisebb $\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{4}=3$-nál, így

$$S_n(x)\leqq\frac{2}{3}<\frac{3}{4},$$

amint azt bizonyítanunk kellett.