E cikkben az F.2468. feladatban kimondott állítást bizonyítjuk be, nevezetesen a következőt:

Akkor és csak akkor létezik olyan konvex n-szög, melynek szögei egyenlők, oldalai pedig valamilyen sorrendben 1, 2, 3,... ,*n egységnyi hosszúak, ha n nem egy prímszám hatványa.*

A feladat megoldásában [1] megmutattuk, hogy a kérdéses n-szög $n = 10$ esetén létezik, és azt is láttuk, hogy a bizonyítandó állítás ekvivalens a következővel:

Legyenek $\mathbf{x}_1$,... , $\mathbf{x}_n$ *egy szabályos n-szög középpontjából a csúcsokba mutató vektorok. Akkor és csak akkor létezik az* 1, 2, ... , n *számoknak olyan* a_1, a_2,... ,a_n *permutációja, amivel az*

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ \ldots\ + a_n\mathbf{x}_n$$

vektorösszeg a nullvektor, ha n nem egy prímszám hatványa.

Bizonyításunk két részre oszlik attól függően, hogy n prímhatvány-e vagy sem.

1. *n nem prímhatvány.* Ebben az esetben n felbomlik két egynél nagyobb, egymáshoz relatív prím egész szorzatára, legyen $n = p \cdot q$ egy ilyen felbontás. Jelöljük $p(i)$-vel, illetve $q(i)$-vel azt a maradékot, ami i-nek p-vel, q-val való osztásakor adódik. A p függvény értéke minden p-edik egész számra ugyanaz, tehát $p(1), p(2), \ldots, p(n)$ között pontosan q darab 0, q darab 1-es stb. fordul elő.
Így

$$p(1)\mathbf{x}_1 + p(2)\mathbf{x}_2 + \ \ldots\ + p(n)\mathbf{x}_n = \mathbf{0}, \tag{1}$$

hiszen azok az $\mathbf{x}_i$ vektorok, amelyekre $p(i)$ egy rögzített (0 és $p-1$ közé eső) értéket vesz fel, egy szabályos q-szög csúcsaiba mutatnak – s egy szabályos sokszög középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összege mindig $\mathbf{0}$. Ezért (1) bal oldala p darab nullvektor összege, s ezért maga is $\mathbf{0}$.

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$q(1)\mathbf{x}_1 + q(2)\mathbf{x}_2 + \ \ldots\ + q(n)\mathbf{x}_n = \mathbf{0},$$

csak most q darab szabályos p-szöget kifeszítő részösszegre bontható a bal oldal. Ha most az $a_i = 1 + p(i) + p \cdot q(i)$ értékeket választjuk, akkor a kérdéses vektorösszeg

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{n} p(i)\mathbf{x}_i + p \cdot \sum_{i=1}^{n} q(i)\mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

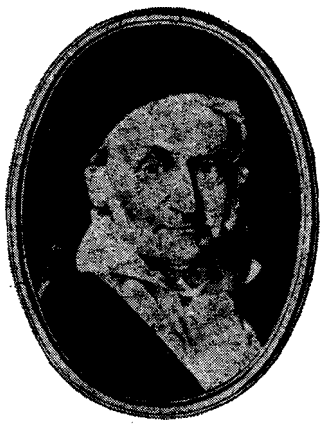
Ezek az a_i értékek nyilván 1 és $n = p \cdot q = 1 + (p-1) + p \cdot (q-1)$ közé eső egészek.

Tehát a keresett permutáció létezését azonnal igazoltuk, mihelyst beláttuk, hogy az így definiált a_1, a_2,... , a_n számok között nincs két egyenlő. Ám $a_i = a_j$ csak úgy lehet, ha $p(i) = p(j)$ (osszuk el a_i-t és a_j-t is p-vel), de ekkor $q(i) = q(j)$ is fennáll. Ám $p(i) = p(j)$ azt jelenti, hogy $i - j$ osztható p-vel, $q(i) = g(j)$ pedig azt, hogy $i - j$ osztható q-val. p és q relatív prímek, tehát $i - j$ osztható $p \cdot q = n$-nel is, ami lehetetlen, mivel i és j is 1 és n közé eső egészek. Ezzel igazoltuk az állítást mindazon értékekre, amikor n nem prímhatvány.

A bizonyításnak ez a fele lényegében *Kaiser Andrástól* (Bp., József A. Gimn.) származik. Rajta kívül még *Megyesi Gábor* (akkor a szegedi Ságvári Endre Gyak. Gimn. tanulója volt) küldte be ennek a résznek a bizonyítását.

2. *n prímhatvány.* Az állítás e felének bizonyítása lényegesen nehezebb, mint az előzőé. Azt kell ugyanis megmutatni, hogy *nem létezik* az 1, 2, ..., n számoknak megfelelő permutációja. Míg előbb elegendő volt egyetlen ilyet találni és arról igazolni, hogy az jó (bár arról nem esett szó, hogyan találtuk meg ezt a bizonyos permutációt), jelen esetben az összes permutációról kell igazolnunk, hogy rossz. Ezek száma már $n = 20$ esetén is olyan óriási, hogy egyesével végignézni lehetetlenség. A helyzet kissé hasonlít a szabályos sokszögek szerkeszthetőségéhez. Könnyű szabályos ötszöget szerkeszteni, s a szerkesztés helyességének igazolása sem túl bonyolult. Magát a szerkesztést valószínűleg már Pitagorasz is ismerte (i. e. 550 körül). Ám annak bizonyítása, hogy semmiféle (euklideszi) szerkesztési eljárással nem tudunk szabályos hétszöget szerkeszteni, csak majd 2000 év múlva sikerült Gaussnak, a „matematika fejedelmének". Ő a geometriai szerkesztési feladatot algebrai, pontosabban polinomokra vonatkozó feladattá fogalmazta át, amit végül is sikerrel megoldott.

[1] Lásd e számunk 104. oldalán.



C. F. Gauss (1777—1855)

Mi is ezt az utat követjük: a bizonyítandó állítást egy algebrai állítássá fogalmazzuk át. Majd az apró lemmák kimondása után az átfogalmazott állításra kerül sor. Érdekességképpen megjegyezzük, hogy a fenti párhuzam nem csupán illusztráció: a felhasználásra kerülő algebrai apparátus, sőt a lemmák is megegyeznek azokkal, amiket Gauss az idézett tétel bizonyítására használt.

Lássuk először az átfogalmazást. Az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ egységnyi hosszúságú vektorok egy pozitív körüljárású szabályos n-szög csúcsaiba mutatnak. Helyezzük el ezeket a vektorokat a komplex számsíkon úgy, hogy a sokszög középpontja a számsík origójába, az $\mathbf{x}_n$ vektor végpontja pedig a valós számegyenes $+1$ pontjába essen. Jelöljük ε-nal azt a komplex számot, amelybe az $\mathbf{x}_1$ vektor végpontja mutat. Az ε abszolút értéke (hossza) 1, modulusa (a pozitív valós tengellyel bezárt szöge) $2\pi/n$. Így az ε-nal történő szorzás egy pozitív irányú $2\pi/n$ nagyságú szöggel való elforgatást jelent, például $\varepsilon^2 = \varepsilon \cdot \varepsilon$-t úgy kapjuk, hogy ε-t elforgatjuk az origó körül $2\pi/n$ szöggel. Tehát $\mathbf{x}_2$ végpontja ε^2, s hasonlóan $\mathbf{x}_i$ végpontja ε^i. Speciálisan $\varepsilon^n = 1$, ahonnan

$$0 = \varepsilon^n - 1 = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^{n-1} + \varepsilon^{n-2} + \ \ldots \ + \varepsilon^n + \varepsilon + 1).$$

Mivel $\varepsilon \neq 1$, azért a második tényezőnek kell nullának lennie. Komplex számokat vektorként kell összeadni, az

$$\varepsilon^{n-1} + \varepsilon^{n-2} + \ \ldots \ + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \tag{2}$$

összefüggés azt mondja ki, hogy a szabályos n-szög középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összege nulla, ahogyan azt már korábban állítottuk. Az $1, \varepsilon, \varepsilon^n, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ számokat *n-edik egységgyököknek* szokás nevezni, hiszen ezek (és csak ezek) n-edik hatványa 1.

A (2) összefüggést még úgy is értelmezhetjük, hogy ε gyöke az

$$f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ \ldots \ + x^2 + x + 1 \tag{3}$$

polinomnak. A bizonyítandó állítás, mármint az, hogy az $1, 2, \ldots, n$ számok tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ permutációjára $\Sigma a_i x_i \neq 0$, komplex számokkal megfogalmazva azt mondja, hogy $\Sigma a_i \varepsilon^i \neq \mathbf{0}$, vagyis hogy ε *nem gyöke* a

$$g(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ \ldots \ + a_2 x^2 + a_1 x + a_n \tag{4}$$

polinomnak. Ezzel elérkeztünk a keresett átfogalmazáshoz:

Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok tetszőleges megengedett megválasztása mellett az f(x)és g(x) polinomoknak nem lehet közös (komplex) gyöke.

Hogy ne szakítsuk meg a bizonyítás menetét, előrebocsátunk két, polinomokra vonatkozó segédtételt. Ezek bizonyítása – mint látni fogjuk – sok ötletet igényel és meglehetősen hosszú. Mindamellett ezek a lemmák sokszor alkalmazhatók, például a szerkeszthetőség elméletében alapvető jelentőségűek.

1. Lemma *Ha n prímszám, akkor az* $f(x) = x^{n-1} + \ \ldots \ + x^2 + x + 1$ *polinom nem bontható fel két (legalább elsőfokú) racionális együtthatós polinom szorzatára.* (Ezt úgy mondjuk, hogy $f(x)$ irreducibilis a racionális számtest felett.)

2. Lemma Legyen $f(x)$ és $g(x)$ két tetszőleges racionális együtthatójú polinom, és tegyük föl, hogy az α *(komplex) szám mindkettőnek gyöke. Ekkor vannak olyan* $f_1(x)$, $g_1(x)$ *és* $h(x)$ *racionális együtthatós polinomok, hogy*

$$f(x) = f_1(x) \cdot h(x), \qquad g(x) = g_1(x) \cdot h(x)$$

és α *a gyöke* $h(x)$*-nek. (Elképzelhető, hogy* $f_1(x)$ *vagy* $g_1(x)$ *azonosan konstans polinom.)*

Legyen tehát most n prímszám, és tegyük fel, hogy a (3) és (4) alatt definiált f és g egész együtthatós, tehát speciálisan racionális együtthatós polinomoknak volna közös gyöke. Ekkor a 2. lemma szerint $f(x) = f_1(x) \cdot h(x)$ és $g(x) = g_1(x) \cdot h(x)$ alakban szorzattá bonthatók, ahol f_1, g_1 és h racionális együtthatósak. Az 1. lemma szerint f nem bontható fel legalább elsőfokú racionális együtthatós polinomok szorzatára, tehát f_1 szükségképpen azonosan konstans, mondjuk mindenütt az $1/r$ racionális értéket veszi fel. Ekkor $f(x) = f_1(x) \cdot h(x)$ alapján

$$h(x) = r \cdot x^{n-1} + r \cdot x^{n-2} + \ \dots \ + r \cdot x^2 + r \cdot x + r.$$

Tudjuk, hogy $g(x) = g_1(x) \cdot h(x)$. Ha g_1 legalább elsőfokú lenne, akkor a $g_1(x) \cdot h(x)$ szorzat legalább n-edfokú polinom lenne, noha (4) szerint $g(x)$ pontosan $(n-1)$- edfokú. Ezért g_1 is nulladfokú, mondjuk azonosan s értéket vesz föl, ezért $g(x) = g_1 x \cdot h(x)$ miatt $g(x)$

$$(rs) \cdot x^{n-1} + (rs) \cdot x^{n-2} + \ \dots \ + (rs) \cdot x^2 + (rs) \cdot x + (rs)$$

alakú. Ennek minden együtthatója egyenlő, tehát például $a_1 = a_2$. Ez pedig lehetetlen, hiszen a_1, a_2, …, a_n az 1, 2, …, n számok egy permutációja, így páronként különböző számokból áll. Ellentmondásra jutottunk abból a feltevésből, hogy a (3) és (4) alatti polinomoknak van közös gyökük (legalábbis abban az esetben, ha n prím), így az állítást bizonyítottuk.

A bizonyítás egy kicsit többet adott, nevezetesen a következőt. Ha a_1, a_2, …, a_n olyan egész számok, amelyekre a (3) és (4) alatti polinomoknak van közös gyökük, akkor szükségképpen $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. „Visszagöngyölve" azokat az átfogalmazásokat, átalakításokat, amiket az eredeti feladaton csináltunk, ebből az alábbi tételt kapjuk:

Legyen n egy prímszám. Ha egy n oldalú konvex n-szög minden szöge egyenlő és minden oldalának mértékszáma egész, akkor a sokszög szabályos (és persze az oldalak egyenlők).

A téglalap mutatja, hogy ez az állítás nem marad érvényben, ha n-et prímszám helyett prímhatványnak választjuk. Mivel ezt a következményt kizárólag az 1. és 2. lemmából vezettük le, azért az 1. lemma állítása nem maradhat érvényben $n = 4$-re. (Tehát abból, hogy létezik 1 és 2 oldalhosszúságú téglalap, következtetünk arra, hogy az $x^3 + x^2 + x + 1$ polinom felbomlik két racionális együtthatójú polinom szorzatára! S valóban, $x^2 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$.) Prímhatványra tehát általában a fenti gondolatmenet nem használható, ráadásul ha n nem prímszám, a (3) alatti polinom biztosan nem irreducibilis. Ahhoz, hogy mégis mentsük ami menthető, elsőként olyan irreducibilis polinomot kell találnunk, aminek a legkisebb modulusú n-edik egységgyök, amit ε-nal jelölünk, gyöke. Legyen tehát $n = p^k$, ahol p prím és $k \geq 1$ egész szám. Jelöljük a p^{k-1} számot q-val, ekkor $n = p \cdot q$, tehát $\varepsilon^n = \varepsilon^{pq} = 1$, és persze $\varepsilon^q \neq 1$. Így

$$0 = \varepsilon^n - 1 = (\varepsilon^q)^p - 1 = (\varepsilon^q - 1)(\varepsilon^{(p-1)q} + \varepsilon^{(p-1)q} + \ \dots \ + \varepsilon^q + 1),$$

következésképp ε gyöke az

$$f^*(x) = x^{(p-1)q} + x^{(p-2)q} + \ \dots \ + x^{2q} + x^q + 1 \tag{5}$$

polinomnak.

3. Lema *Az $f^*(x)$ egész együtthatós polinom irreducibilis a racionális számtest felett.*

Vegyük észre, hogy az 1. lemma speciális esete a 3. lemmának $k = 1$, azaz $q = 1$ mellett.

Legyen most $n = p^k$ és tegyük fel, hogy az a_1, a_2, …, a_n egész számok olyanok, hogy a

$$g(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots \ + a_2x^2 + a_1x + a$$

polinomnak és a fenti $f^*(x)$ polinomnak van közös gyöke. Pontosan ugyanúgy, mint az előbb, csak most a 2. és 3. lemma segítségével adódik, hogy van olyan racionális együtthatójú $g_1(x)$ polinom, amivel

$$g(x) = g_1(x) \cdot f^*(x).$$

Az $f^*(x)$ fokszáma $(p-1) \cdot q$, a $g(x)$-é $n - 1 = pq - 1$, ezért $g_1(x)$ fokszáma $(pq-1) - (p-1) \cdot q = q - 1$, vagyis

$$g_1(x) = b_{q-1}x^{q-1} + b_{q-2}x^{q-2} + \ \dots \ + b_1x + b_0.$$

Ekkor viszont a $g_1(x) \cdot f^*(x)$ szorzatban minden $0 \leq i \leq q-1$ mellett az x^i, x^{i+q}, …, $x^{i+(p-1)q}$ együtthatója mind b_i, tehát $g(x)$-ben a megfelelő hatványok együtthatói is egyenlők. Következésképp a_1, a_2, …, a_n nem lehet mind különböző, és így nem lehet az 1, 2, …, n számok egy permutációja sem. A tételt ezzel igazoltuk.

A bizonyítás most azt adta, hogy $g(x)$-ben minden $q = p^{k-1}$- edik együttható megegyezik. Ezt az egyenlőszögű n-szögekre a következőképpen fogalmazhatjuk át:

Legyen $n = p^k$, ahol p prímszám. Ha egy n oldalú konvex n-szög minden szöge egyenlő és oldalainak mértékszáma egész, akkor a sokszög minden p^{k-1}- edik oldala ugyanolyan hosszú.

Ebből: $k = 1$-re visszaadódik az előző követelmény, $n = 8$-ra pedig a 2137-es gyakorlat általánosítása: ha egy konvex sokszög minden szöge 135° és oldalai egészek, akkor szemközti oldalai egyenlő hosszúak.

Ami hátra van, a korábban kimondott három lemma bizonyítása. Valójában elég csak az utóbbi kettőt belátni, hiszen a 3. lemmának speciális esete az 1.

A 2. lemma bizonyítása

Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ olyan racionális együtthatós polinomok, amelyeknek az α (komplex) szám közös gyöke. Olyan $f_1(x)$, $g_1(x)$ és $h(x)$ racionális együtthatójú polinomokat kell találnunk, amelyekre

$$f(x) = f_1(x) \cdot h(x), \qquad g(x) = g_1(x) \cdot h(x),$$

és α gyöke $h(x)$-nek.

Az állítást $f(x)$ és $g(x)$ fokszámának összegére vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Feltehetjük, hogy $f(x)$ és $g(x)$ legalább elsőfokú, így

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ \dots\ + a_{m-1}x + a_m$$

és

$$g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ \dots\ + b_{n-1}x + b_n,$$

ahol $a_0 \neq 0$ és $b_0 \neq 0$, és mondjuk $n \leq m$. Indukciós feltevésünk szerint az állítás igaz az összes olyan polinom párra, melyek fokszámainak összege kisebb $(m+n)$-nél.

Tekintsük most az $\overline{f}(x) = f(x) - \dfrac{a_0}{b_0} \cdot x^{m-n} \cdot g(x)$ polinomot. Ez nyilván racionális együtthatós, fokszáma m-nél kisebb, és mivel α gyöke volt $f(x)$-nek és $g(x)$-nek is, gyöke lesz $\overline{f}(x)$-nek is. Ha most $\overline{f}(x)$ nulladfokú, akkor $\overline{f}(\alpha) = 0$ miatt azonosan nulla, és ekkor

$$f(x) = \frac{a_0}{b_0}x^{m-n} \cdot g(x) \qquad \text{és} \qquad g(x) = 1 \cdot g(x)$$

megfelelő felbontás. Ha viszont $\overline{f}(x)$ legalább elsőfokú, akkor $\overline{f}(x)$-re és $g(x)$-re az állítást már tudjuk, hiszen fokszámaik összege kisebb $(m+n)$-nél. Tehát vannak $f_1(x)$, $g_1(x)$ és $h(x)$ racionális együtthatójú polinomok, amikre $h(x)$-nek α gyöke, továbbá

$$\overline{f}(x) = f_1(x) \cdot h(x) \qquad \text{és} \qquad g(x) = g_1(x) \cdot h(x).$$

Ekkor viszont

$$f(x) = \overline{f}(x) + \frac{a_0}{b_0}x^{m-n}g(x) = \left(f_1(x) + \frac{a_0}{b_0}x^{m-n}g_1(x)\right) \cdot h(x)$$

és

$$g(x) = g_1(x) \cdot h(x)$$

adja a keresett felbontást. Ezzel a 2. lemmát bizonyítottuk.

A 3. lemma bizonyítása

A lemma egy bizonyos egész együtthatós polinomról állítja, hogy nem bontható fel két racionális együtthatójú polinom szorzatára. Elsőként azt mutatjuk meg, hogy ha a polinom felbomlik racionális együtthatójú polinomok szorzatára, akkor egész együtthatós polinomok szorzataként is felírható. Ez az állítás *Gauss- féle lemma* néven ismeretes, és természetesen Gausstól származik.

Legyen tehát

$$f(x) = x^n + A_1x^{n-1} + \ \dots\ + A_{n-1}x + A_n =$$
$$= (x^r + b_1x^{r-1} + \ \dots\ + b_{r-1}x + b_r)(x^s + c_1x^{s-1} + \ \dots\ + c_{s-1}x + c_s),$$

ahol A_1, A_2, $\dots$, A_n egész számok, a b_i, c_i együtthatók pedig racionálisak. Tegyük fel, hogy b_i, c_i már tovább nem egyszerűsíthető alakban van felírva, és legyen B_0 a b_i együtthatók nevezőinek legkisebb közös többszöröse, C_0 pedig a c_i együtthatóké. Legyen még

$$b_i = \frac{B_i}{B_0}, \qquad c_i = \frac{C_i}{C_0}.$$

Világos, hogy nincs olyan prímszám, ami osztója lenne a B_0, B_1, $\dots$, B_r számok mindegyikének, s olyan sincs, ami a C_0, C_1, $\dots$, C_s mindegyikét osztaná.

A fenti szorzat mindkét oldalát B_0C_0-lal szorozva kapjuk, hogy

$$B_0C_0f(x) = (B_0x^r + B_1x^{r-1} + \ \dots\ + B_r)(C_0x^s + C_1x^{s-1} + \ \dots\ + C_s).$$

A bal és jobb oldalon a megfelelő hatványok együtthatóinak meg kell egyeznie, tehát

$$B_0C_0A_1 = B_0C_1 + B_1C_0,$$
$$B_0C_0A_2 = B_0C_2 + B_1C_1, + B_2C_0.$$
$$\dots$$
$$B_0C_0A_{i+j} =$$
$$= B_0C_{i+j} + B_1C_{i+j-1} + \ \dots \ + B_{i-1}C_{j+1} + B_iC_j + B_{i+1}C_{j-1} + \ \dots \ + B_{i+j}C_0$$
$$\dots$$

Legyen p tetszőleges prímosztója a B_0C_0 szorzatnak. Előző megjegyzésünk értelmében p nem lehet osztója az összes B_i számnak, van olyan $0 \leq i \leq r$, hogy p osztója B_0, B_1, $\dots$, B_{i-1}-nek, de nem osztója B_i-nek. Ugyanígy van olyan $0 \leq j \leq s$ is, hogy p osztója C_0, C_1, $\dots$, C_{j-1} mindegyikének, de nem osztója C_j -nek. Ez a p osztója $B_0C_0A_{i+j}$–nek. A fenti kifejezésekben $B_0C_0A_{i+j}$ jobb oldalán viszont mindegyik összeadandó – az egyetlen B_iC_j kivételével – osztható p-vel, B_iC_j nem osztható, ezért a jobb oldal sem osztható p-vel.

Az ellentmondás azt jelenti, hogy nem lehet B_0C_0-nek prímosztója, vagyis $B_0C_0 = 1$, ahonnan $B_0 = C_0 = 1$. Ez viszont azt mutatja, hogy az $f(x)$ szorzat előállításában a b_i, c_i együtthatók szükségszerűen egészek. A Gauss-lemmát bizonyítottuk.

Ennek alapján annak bizonyításához, hogy egy 1 főegyütthatójú, egész együtthatós polinom nem bontható fel racionális együtthatójú polinomok szorzatára, elegendő megmutatni, hogy nem bontható *egész* együtthatójú polinomok szorzatára. Erre ad elégséges feltételt az alábbi, *Schoenemann és Eisenstein,* a múlt század közepén működő német matematikusokról elnevezett kritérium:

Ha az egész együtthatós

$$f(x) = x^n + A_1x^{n-1} + \ \dots \ + A_{n-1}x + A_n$$

polinom A_1, A_2, $\dots$, A_n együtthatói mind oszthatók a p prímszámmal, és A_n nem osztható p^2-tel, akkor a polinom nem bontható fel egész együtthatós polinomok szorzatára.

Tegyük fel ugyanis, hogy $f(x)$ felírható

$$(x^r + B_1x^{r-1} + \ \dots \ + B_r)(x^s + C_1x^{s-1} + \ \dots \ + C_s)$$

alakban, ahol B_i és C_i egészek. Ekkor $B_rC_s = A_n$ miatt ez a szorzat osztható p-vel, de nem osztható p^2-tel — következésképp B_r és C_s közül pontosan az egyik osztható p-vel. Legyen ez mondjuk C_s. Ekkor

$$A_{n-1} = B_{r-1}C_s + B_rC_{s-1}$$

szerint $B_rC_{s-1} = A_{n-1} - B_{r-1}C_s$ is osztható p-vel, de mivel B_r nem osztható vele, ezért C_{s-1}-nek kell p-vel oszthatónak lennie. Hasonlóan

$$A_{n-2} = B_{r-2}C_s + B_{r-1}C_{s-1} + B_rC_{s-2}$$

alapján az adódik, hogy C_{s-2} is osztható p-vel stb., végül

$$A_r = B_{r-s}C_s + B_{r-s+1}C_{s-1} + \ \dots \ + B_{r-1}C_1 + B_rC_0$$

miatt azt kapjuk, hogy $C_0 = 1$ is osztható p-vel, ami ellentmondás. Ez pedig a Schoenemann–Eisenstein kritérium helyességét igazolja.

Most már rátérhetünk a 3. lemma állításának bizonyítására. Legyen p egy prímszám, $q = p^{k-1}$ valamely $k \geq 1$ egészre. Azt szeretnénk belátni, hogy az

$$f(x) = x^{(p-1)q} + x^{(p-2)q} + \ \dots \ + x^{2q} + x^q + 1$$

egész együtthatós polinom irreducibilis. A Gauss-lemma alapján ehhez elég belátnunk, hogy $f(x)$ nem bontható fel két egész együtthatós polinom szorzatára. Ez utóbbi igazolására a Schoenemann–Eisenstein kritériumot szeretnénk használni. Ez persze közvetlenül nem megy, egy picit ravaszkodnunk kell. Tekintsük a

$$g(x) = f(x+1) = (x+1)^{(p-1)q} + \ \dots \ + (x+1)^{2q} + (x+1)^q + 1$$

egész együtthatós polinomot. Ha $f(x)$ felbomlana két egész együtthatós polinom szorzatára, akkor persze $g(x)$ is felbomlana, Így abból, hogy $g(x)$ irreducibilis, következtethetünk arra, hogy $f(x)$ is az. $g(x)$-re viszont már működik a kritérium. A binomiális tétel alapján világos, hogy $g(x)$ legmagasabb fokú tagja $x^{(p-1)q}$ konstans tagja pedig p (hiszen $p-1$ darab $(x+1)$-hatványt kell összeadnunk). Ezért elég belátni, hogy $g(x)$-ben az összes többi előforduló hatvány együtthatója osztható p-vel.

Elsőként számítsuk ki $(x+1)^q$-t:

$$(x+1)^q = x^q + 1 + \sum_{i=1}^{q-1} \binom{q}{i} x^i.$$

A szumma-jel mögött álló binomiális együtthatók mind oszthatók p-vel, hiszen

$$\binom{q}{i} = \frac{q}{i}\binom{q-1}{i-1},$$

a második tényező egész $1 \le i \le q-1$ esetén, és az első tényező számlálója az egyszerűsítések után is osztható p-vel. Ezért

$$(x+1)^q = x^q + 1 + p \cdot G(x),$$

és így

$$(x+1)^{iq} = (x^q + 1 + p \cdot G(x))^i = (x^q+1)^i + p \cdot G_i(x)$$

szintén a binomiális tétel alapján, ahol $G(x)$ és $G_i(x)$ is egész együtthatós polinomok. Ezekkel a $g(x)$ polinomot a következőképpen írhatjuk föl:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{p-1} (x+1)^{iq} = \sum_{i=0}^{p-1} (x^q+1)^i + p \cdot \sum_{i=0}^{p-1} G_i(x).$$

A jobb oldalon az első szumma $x^q = ((x^q+1)-1)$-szerese éppen $(x^q+1)^p - 1$, ami a binomiális tétel szerint a következővel egyezik meg:

$$x^{qp} + \binom{p}{1} x^{q(p-1)} + \ \ldots \ + \binom{p}{p-1} x^q = x^q (x^{(p-1)q} + p \cdot H(x)),$$

ahol $H(x)$ egész együtthatójú. Ezért

$$g(x) = x^{(p-1)q} + p \cdot H(x) + p \cdot \sum_{i=0}^{p-1} G_i(x),$$

vagyis $g(x)$-ben valóban az összes többi együttható osztható p-vel, amint állítottuk. Innen a Schoenemann–Eisenstein kritérium alapján $g(x)$ irreducibilis – tehát $f(x)$ is az, ez pedig a 3. lemma állítása volt.