Mielőtt az oszthatósági kérdésre válaszolnák, alakítsuk át a kettős összeget:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} i^2 &= 1^2+(1^2+2^2)+\ldots+(1^2+2^2+\ldots+n^2)= \\ &= n\cdot 1^2+(n-1)\cdot 2^2+\ldots+1\cdot n^2= \\ &= n(1^2+2^2+\ldots+n^2)-(0\cdot 1^2+1\cdot 2^2+\ldots+(n-1)\cdot n^2)= \\ &= n\sum_{i=1}^{n} i^2-\sum_{i=1}^{n}(i-1)i^2= \\ &= n\sum_{i=1}^{n} i^2-\sum_{i=1}^{n} i^3+\sum_{i=1}^{n} i^2.\end{aligned}$$

Felhasználva az ismert

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad \sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

összefüggéseket, kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12} \tag{2}$$

a) Vizsgáljuk meg most, hogy új kifejezése szerint milyen n értékekre osztható n-nel az összeg. Nyilván azokra, amelyekre

$$\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12n}=\frac{(n+1)^2(n+1)}{12}$$

egész szám, tehát azt kell megvizsgálni, hogy mely n-ekre lesz 12-vel osztható az $(n+1)^2(n+2)$ kifejezés. Ahhoz, hogy az oszthatóság fennálljon, szükséges és elégséges, hogy $(n+1)^2(n+2)$-nek 3 is, 4 is osztója, légyen. A 3 akkor és csak akkor osztója, ha n nem osztható 3-mal, hiszen az $n,\ n+1,\ n+2$ számok közül pontosan az egyik osztható 3-mai, tehát az egyetlen „rossz eset”, amikor n osztható 3-mai. Hasonlóan kapjuk, hogy másik oszthatósági követelményünk akkor és csakis akkor áll fenn, ha n nem osztható 4-gyél. Ha ugyanis $n=4k$ alakú szám, akkor $(n+1)$ páratlan; $(n+2)$ csak 2-vel osztható, 4-gyel nem. Ha viszont $n=4k+1$, vagy $(4k+3)$ vagy $(4k+2)$ alakú, akkor vagy $n+1$ páros, így $(n+1)^2$ osztható 4-gyel, vagy $n+2=4k+4$, osztható 4-gyel.

Így az összeg akkor osztható n-nel, ha n maga sem 3-mal, sem 4-gyel nem osztható.

b) A (2) kifejezés azokra az n-ekre osztható $(n+1)$-gyel, amelyekre $\dfrac{n(+1)(n+2)}{12}$ egész szám, vagyis amelyekre $n(n+1)(n+2)$-nek 3 is, 4 is osztója. A szorzat 3-mal biztosan osztható, mivel egymás utáni szám szorzatáról van szó. 4-gyel viszont csak akkor osztható, ha n nem $(4k+1)$ alakú. Hiszen ha $n=4k+1$, akkor n és $(n+2)$ páratlan, $n+1$ pedig csak 2-vel osztható; viszont $n=4k,\ 4k+2$ és $(4k+3)$ alakú szám esetén n és $(n+2)$ mindegyike páros, illetve $(n+1)$ osztható 4-gyel. Tehát a (2) összeg $(n+1)$-gyel akkor osztható, ha n nem $4k+1$ alakú.