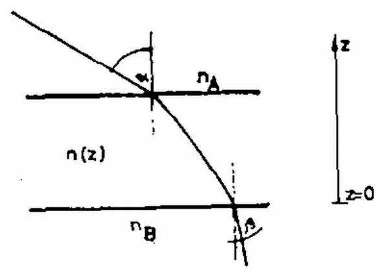
1. *a) Tekintsünk egy átlátszó plánparalel lemezt! A lemez anyagának törésmutatója* (n) *az alsó* (B) *laptól mért távolság függvényében változik. Mutasd meg, hogy* $n_A \sin\alpha = n_B \sin\beta$! *A jelöléseket az 1. ábra tartalmazza.*

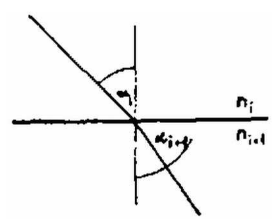


1. ábra

b) Tegyük fel, hogy egy nagy sík sivatagban állsz! Úgy látod, mintha bizonyos távolságban tőled vízfelszín volna. Ha közeledsz a „vízhez", úgy tűnik, mintha az hátrébb menne oly módon, hogy a távolság közted és a „víz" között állandó. Magyarázd meg a jelenséget!

c) Határozd meg, hogy a b)-ben leírt jelenségnél mekkora a levegő hőmérséklete közvetlenül a talajnál! Tegyük fel, hogy a szemed $1{,}6\,\mathrm{m}$ *magasan van a talaj felett, és a távolság közted és a „víz" széle között* $250\,\mathrm{m}$! *A levegő törésmutatója* $15°$ C-on, *normál légnyomás mellett* $1{,}000\,276$. *Tegyük fel, hogy a levegő hőmérséklete a talajtól mért* $1\,\mathrm{m}$ *magasság felett mindenhol* $30°$ C! *A légnyomás egyenlő a normál légnyomással. Jelöljük a törésmutatót* n*-nel! Tegyük fel, hogy* $n-1$ *arányos a levegő sűrűségével! Vizsgáljuk meg az eredmény pontosságát!*

Megoldás. *a*) Osszuk fel a plánparalel lemezt k db egyforma vastagságú, a határfelülettel párhuzamos részre! Ha k elég nagy, akkora a törésmutatót egy ilyen vékony részben állandónak tekinthetjük. Jelöljük az i-edik részben a törésmutatót n_i-vel,továbbá $n_A = n_0$, $n_B = n_{k+1}$.



2. ábra

A 2. ábra alapján

$$\frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_{i+1}} = \frac{n_{i+1}}{n_i}.$$

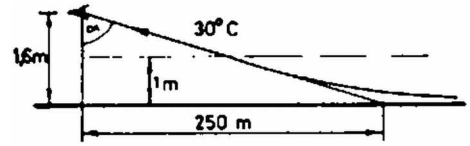
Ekkor

$$\frac{n_B}{n_A} = \frac{n_{k+1}}{n_k}\cdot\frac{n_k}{n_{k-1}}\cdot\frac{n_{k-1}}{n_{k-2}}\cdot\ldots\cdot\frac{n_1}{n_0} =$$
$$= \frac{\sin\alpha_k}{\sin\alpha_{k+1}}\cdot\frac{\sin\alpha_{k-1}}{\sin\alpha_k}\cdot\ldots\cdot\frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

b) A napsugárzás hatására a talaj közvetlen közelében a levegő jobban felmelegszik, mint szemmagasságban, így ott törésmutatója is kisebb. Ha a földfelszínnel elég kis szöget bezáróan nézünk lefelé, azaz elég távolra nézünk, akkor a talaj közvetlen közelében a teljes visszaverődés jelensége lép fel, és a talajon az ég kékjét mint „vizet" látjuk. Ha odébb menve a hőmérsékleti viszonyok nem változnak, a „víz" is odébb megy, hiszen a jelenséget csak bizonyos szög alatt nézve láthatjuk.

c) Jelöljük T-vel az ismeretlen hőmérsékletet! Teljes visszaverődés határesetében $\sin\ \alpha = n_T/n_{30}$. Tudjuk, hogy $\mathrm{tg}\ \alpha = 250\ \mathrm{m}/1{,}6\ \mathrm{m}$ (3. ábra), innen $\alpha = 89°\ 38'$, így az előző egyenlőtlenségből

(1) $$n_T = n_{30}\cdot 0{,}999\ 979\ 5.$$



3. ábra

A feladat szövege alapján felírhatjuk, hogy

$$n_T = 1 + k\varrho_T; \quad n_{30} = 1 + k\varrho_{30}; \quad 1{,}000\,276 = 1 + k\varrho_{15}, \tag{2}$$

ahol ϱ a levegő sűrűsége és k állandó. Tudjuk továbbá, hogy

$$\varrho_T \cdot (T + 273\,\mathrm{K}) = \varrho_{30} \cdot 304\,\mathrm{K} = \varrho_{15} \cdot 288\,\mathrm{K}. \tag{3}$$

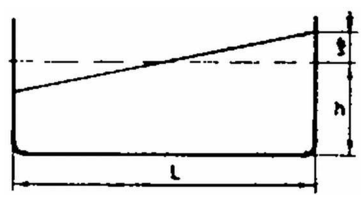
Az (1), (2), (3) összefüggésekből $T = 55{,}7°\,\mathrm{C}$.

A számolásokból felhalmozódott hiba a számológép pontossága miatt nagyon kicsi (kisebb, mint 0,1 °C). A valóságban a feladatban megadott adatok közül több csak nagy hibával mérhető (pl. 250 m, 30 °C), így az eredmény hibája legalább néhány °C.

2. *Egyes tavaknál időnként egy furcsa jelenséget (a vízszint periodikus változását) figyelhetjük meg – nevezzük ezt billegésnek. A jelenség általában olyan tavak esetén fordul elő, amelyek mélységükhöz viszonyítva hosszúak, valamint keskenyek. Egy tavon gyakran látunk hullámokat, azonban viszonylag ritkán fordul elő a fenti jelenség, amelynek során az egész víztömeg együtt oszcillál, hasonlóan, mint a kávé a csészében, amikor egy vendégnek visszük.*

A jelenség modellezéséhez téglatest alakú edényt használunk. Az edény hossza L, a vízszint magassága h. Tegyük fel, hogy a vízszint kezdetben kis szöggel dől a vízszinteshez képest! Ezután a víz „billegni” kezd, azaz a víz felszíne állandóan sík, azonban oszcillál egy, az edény hosszának felénél levő vízszintes egyenes körül.

Dolgozz ki modellt a víz mozgására és határozz meg egy kifejezést az oszcilláció T periódusidejére! A kezdeti állapot a 4. ábrán látható. Tegyük fel, hogy $\xi \ll h$!



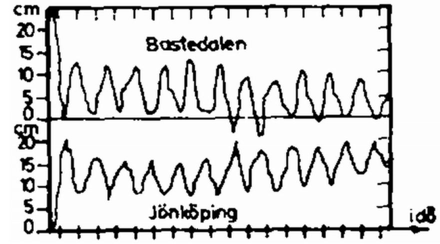
4. ábra

A következő táblázat a periódusidőt adja meg a vízmélység függvényében két különböző hosszúságú edény esetén. Megfelelő módon ellenőrizd, hogy mennyire jól írja le az általad meghatározott összefüggés a mért adatokat! Mi a véleményed a modell használhatóságáról?

L=479 mm	
h (mm)	T (s)
30	1,78
50	1,40
69	1,18
88	1,08
107	1,00
124	0,91
142	0,82

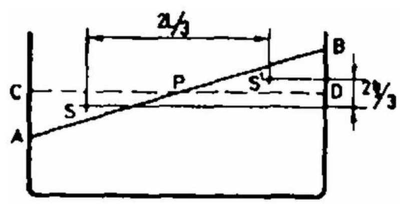
L=143 mm	
h (mm)	T (s)
31	0,52
38	0,48
58	0,43
67	0,35
124	0,28

Az 5. ábra a svédországi Vättern-tóra vonatkozó mérési adatokat mutat, a vízszint változását Bastedalen-nél (a Vättern-tó északi végénél) és Jönköpingnél (déli végénél). Ez a tó 123 km *hosszú és az átlagos vízmélység* 50 m*. Milyen a mérés időskálája?*



5. ábra

Megoldás. Először határozzuk meg a víz súlypontjának vízszintes és függőleges irányú elmozdulását, Δx-et és Δy-t! A 6. ábrán látható jelöléseket használjuk.



6. ábra

Az a vízmennyiség, amely egyensúlyban a PCA háromszögben van, a billegés szélső helyzetében a PBD háromszögbe kerül, mialatt súlypontja vízszintesen $(2L/3)$-mal, függőlegesen pedig $(2\xi/3)$-mal elmozdul. A PCA háromszögben levő és az összes víz tömegének aránya:

$$\frac{\frac{\xi(L/2)}{2}}{Lh} = \frac{\xi}{4h}.$$

Az egész víztömeg súlypontjának elmozdulása az egyensúlyi helyzethez képest

(1) $$\text{vízszintesen: } \mathit{\Delta} x = \frac{\xi}{4h} \cdot \frac{2L}{3} = \frac{\xi L}{6h},$$

(2) $$\text{függőlegesen: } \mathit{\Delta} y = \frac{\xi}{4h} \cdot \frac{2\xi}{3} = \frac{\xi^2}{6h}.$$

A periódusidő meghatározása céljából a következő modellt készítjük:

1. Tegyük fel, hogy a víztömeg vízszintes mozgása harmonikus rezgőmozgás, és a víztömeg együtt mozog. Ha v-vel jelöljük a vízszintes mozgás maximális sebességét és ω-val a rezgés körfrekvenciáját, akkor a feltevés alapján

(3) $$v = \mathit{\Delta} x \cdot \omega.$$

2. Mivel h jóval kisebb, mint L, ezért tegyük fel, hogy a billegés során, amikor a víz felszíne vízszintes, akkor az egész víztömeg vízszintesen mozog. A feltevés alapján így

(4) $$(1/2)mv^2 = mg\mathit{\Delta} y,$$

ahol m az összes víz tömege. Az (1), (2), (3) ós (4) egyenletekből

(5) $$T = \frac{\pi L}{\sqrt{3hg}}.$$

Készítsük el a feladatban közölt két táblázat megfelelőjét az (5) képletből számolt periódusidővel:

L=479 mm	
h (mm)	T (s)
30	1,60
40	1,24
69	1,05
88	0,94
107	0,85
124	0,79
142	0,74

L=143 mm	
h (mm)	T (s)
31	0,47
38	0,42
58	0,34
67	0,31
124	0,24

Láthatjuk, hogy a modell alapján számított periódusidő jól követi a mért periódusidő változásait, de szisztematikusan (átlagosan 15 %-kal) kisebbek az értékek. Ezért az (5) képlet helyett a következő összefüggést használjuk a periódusidő meghatározására:

(6) $$T = 1,15\frac{\pi L}{\sqrt{3hg}}.$$

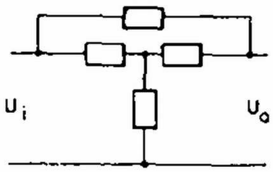
A (6) képletből számolt periódusidő hibája feltehetően 10 % alatt marad.

A periódusidő a Vättern-tó esetén a (6) összefüggésből:

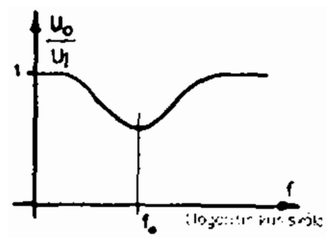
$$T = 3,2\,\text{óra}.$$

Az 5. ábra időtengelyén 19 beosztásra 12 periódus jut, így egy beosztás 2 órának felel meg kb. 10 %-os hibával.

3. *Egy elektromos szűrő áramkör négy alkotóelemből áll, amint azt a 7. ábrán láthatod. A feszültségforrás belső ellenállása elhanyagolható, és a terhelés ellenállását végtelennek veheted. A szűrő áramkörnek olyannak kell lennie, hogy az U_0/U_i hányados a 8. ábrának megfelelően függjön a frekvenciától, ahol U_i a feszültségforrás feszültsége és U_0 a kimenő feszültség. Az f_0 frekvenciánál az U_i és az U_0 között a fáziskülönbségnek nullának kell lennie.*



7. ábra



8. ábra

A szűrőáramkör megépítéséhez a következő alkotóelemek közül válogathatsz:

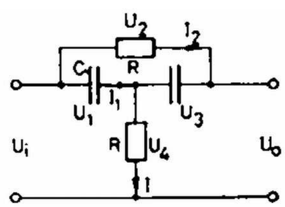
2 db 10 kΩ-*os ellenállás,*

2 db 10 nF-*os kondenzátor,*

2 db 160 mH-*s tekercs. (A tekercsek nem tartalmaznak vasat és elhanyagolható ellenállásúak.)*

A felsorolt alkotóelemek közül négy felhasználásával tudsz olyan szűrő áramkört készíteni, amely kielégíti az ábrákon látható feltételeket. Határozd meg az összes lehetséges kombináció esetén az f_0 frekvenciát és az U_0/U_i hányadost ennél a frekvenciánál!

Megoldás. Legyen $A(\omega) = U_0(\omega)/U_i$. Tekintsük a 9. ábra szerinti kapcsolást!



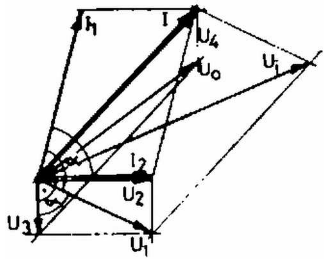
9. ábra

Egyenáram esetén a kondenzátorok szakadásként viselkednek, ezért $A(0) = 1$. Nagy frekvencián a kondenzátorok rövidzárként viselkednek, ezért $\lim_{\omega\to\infty} A(\omega) = 1$.
Nyilván teljesül továbbá, hogy $0 \le A \le 1$.

A 9. ábra jelöléseit használva felírhatjuk a következőket:

$$I_1 + I_2 = I, \quad U_2 + U_3 = U_1, \quad U_1 + U_4 = U_i, \quad U_3 + U_4 = U_0.$$

A kapcsoláshoz tartozó vektorábrát a 10. ábrán láthatjuk.



10. ábra

Jelöljük x, ill. y indexszel a vektorok vízszintes ill. függőleges komponenseit! A vektorábráról leolvasható összefüggések a következők:

$$\begin{aligned}
&U_{0x} = U_{4x} = RI_x = R(I_2 + I_{1x}) = U_2 + RI_1 \cos\alpha, \\
&U_{0y} = U_{4y} - U_3 = RI_1 \sin\alpha - U_2 \operatorname{ctg}\alpha, \\
&U_{ix} = 2U_2 + RI_1 \cos\alpha, \\
&U_{iy} = RI_1 \sin\alpha - U_2 \operatorname{ctg}\alpha, \\
&\operatorname{tg}\alpha = U_2/U_3 = RC\omega, \\
&\ I_1 = U_1 C\omega = U_2\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}/R.
\end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszer rendezésével:

$$U_{0x} = 2U_2,$$
$$U_{iy} = U_{0y} = U_2\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right),$$
$$U_{ix} = 3U_2.$$

Így

$$A^2(\omega) = \frac{U_{0x}^2 + U_{0y}^2}{U_{ix}^2 + U_{iy}^2} = \frac{R^4C^4\omega^4 + 2R^2C^2\omega^2 + 1}{R^4C^4\omega^4 + 7R^2C^2\omega^2 + 1}.$$

Ezt a kifejezést ω szerint deriválva, és 0-val egyenlővé téve a következő egyenletet kapjuk:

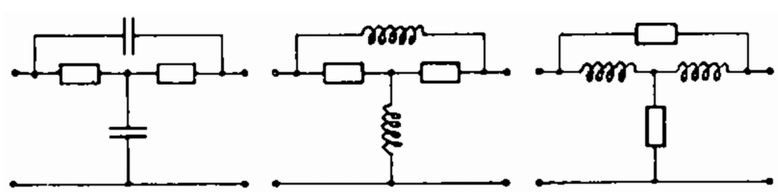
$$\omega \cdot (\omega^4 R^4 C^4 - 1) = 0.$$

Az egyenletnek az $A(\omega)$ minimumához tartozó megoldása:

$$\omega_0 = I/RC = 10^4\ (1/\mathrm{s}), \quad \text{így} \quad f_0 = 1,6\,\mathrm{kHz} \quad \text{és} \quad A(\omega_0) = 2/3.$$

Ilyen frekvencia mellett $U_{iy} = U_{0y} = 0$, ezért U_i és U_0 azonos fázisban van, ahogy a feladat megkívánja.

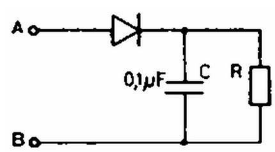
További helyes kapcsolások láthatóak a 11. ábrán. Ezekben az esetekben f_0, $A(\omega_0)$ kiszámítása és a fázisazonosság belátása a fentihez hasonlóan végzendő. (Az Olimpián ezek elvégzése is hozzátartozott a feladat megoldásához.)



11. ábra

Mérési feladatok

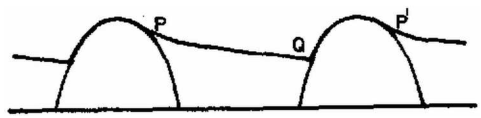
1. *Adott:* 1. *Egy 0,20* kHz *frekvenciára beállított szinuszjel generátor.*
2. *Egy kétcsatornás oszcilloszkóp.*
3. *Milliméterpapír.*
4. *Egy dióda.*
5. *Egy 0,1* μF *kapacitású kondenzátor.*
6. *Egy ismeretlen ellenállás.*
7. *Egy csatlakozókkal ellátott szerelőlap.*
8. *Vezetékek.*



12. ábra

Állítsd össze a 12. ábra szerinti áramkört! Kösd az A és a B pontot a váltóáramú generátor kivezetésére! A generátor 0,20 kHz *frekvenciájú. Határozd meg méréssel az R ellenálláson disszipálódó átlagos teljesítményt, amikor a generátor áramának amplitúdója* 2,0 V *(azaz a csúcstól csúcsig mért amplitúdó* 4,0 V)!

A megoldás menete a következő: A kapcsolás összeállítása után a kondenzátor feszültségét vezessük az oszcilloszkóp bemenetére. Ekkor az oszcilloszkóp ernyőjén a 13. ábrán vastagon kihúzott vonal látható.



13. ábra

A kondenzátor feltöltése a P pontig tart (ez nem a szinusz hullám teteje), majd a P és Q pont között a kondenzátor az R ellenálláson keresztül kisül, mialatt a diódán nem folyik áram. A P és Q pont közötti görbéből a kondenzátor feszültségét leíró $U = U_0 e^{-t/RC}$ összefüggés segítségével R meghatározható. A megfelelő feszültség és idő értékeket az oszcilloszkóp ernyőjéről kell leolvasni. Több mérés elvégzése után R értékét $5 - 10\,\%$ hibán belül meg tudjuk határozni.

R meghatározása után egy teljes periódust (pl. a P és P' közötti részt) sok egyenlő részre osztva leolvashatjuk az egyes időpillanatokban a feszültség értékét. U^2-et az idő függvényében ábrázolva, majd a kapott görbét numerikusan integrálva a $P = U^2/R$ képlet segítségével meghatározhatjuk a keresett átlagos teljesítményt. Körültekintően végezve a mérést, az eredmény hibája kb. $10\,\%$ lesz.

2. *Az adott neonlámpa spektrumában a sárga-narancs-vörös tartományban számos spektrum-vonal található. A rövidebb hullámhosszú tartomány egyik sárga vonala nagyon erős. Határozd meg ennek a vonalnak a hullámhosszát! Becsüld meg, mekkora az általad mért hullámhossz pontossága!*

Adott: Egy 220 V *váltófeszültségre kapcsolt neonlámpa, egy ismeretlen hullámhosszú lézer, egy optikai rács, egy objektív mikrométer (amelyen egy* 1 mm *hosszúságú szakasz* 100 *részre van osztva), egy* 1 m *hosszú vonalzó, állvány.*

Megjegyzés. Ha előre tudod valahonnan a lézer hullámhosszát, nem használhatod ezt az adatot.

A megoldás menete a következő: Az objektív mikrométerrel nem tudunk a neon fényén látható elhajlást létrehozni. Tehát a keresett hullámhossz közvetlenül nem mérhető. Ezért a következőt csináljuk: A lézer fényét a falra vetítjük, és a fénysugárra merőlegesen eléje tesszük az objektív mikrométert. Ekkor a falon jól látható az elhajlási kép. A lézer fényének hullámhosszát meghatározhatjuk az elhajlási törvényből. $\lambda = d \sin \alpha_n / n$, ahol $d = 1/100\,\mathrm{mm}$ a rácsállandó, és α_n az n-edik elhajláshoz tartozó elhajlási szög. (Az $n = 3$-hoz tartozó elhajlás is jól látható.)

A lézer hullámhosszának meghatározása után a lézer segítségével határozzuk meg az adott optikai rács rácsállandóját!

A mérést az előbbihez hasonló módon végezhetjük el. Ha a mérést gondosan végezzük, akkor $5 - 10\,\%$ hibával megkapjuk az optikai rács rácsállandóját.

Most már az optikai rács segítségével meghatározhatjuk a keresett hullámhosszt. A neonlámpa nagyon kicsi, és gyenge fényű. Ezért az optikai rácsot a szemünk elé tartva nézünk a neonlámpa felé. A lámpa egyik sarka, valamint a sárga színű elhajlási kép megfelelő sarka közötti látszólagos távolságot megmérve kiszámíthatjuk az elhajlás szögét. Ismét a fenti képletet használva kapjuk a keresett hullámhosszt kb. $10\,\%$-os hibával.