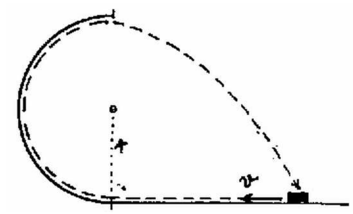
Az I. forduló feladatai

1. *Egy ismeretlen hosszúságú vízszintes pálya r sugarú félkör alakú pályával folytatódik függőleges síkban (1. ábra). Egy testet megfelelő nagyságú v sebességgel úgy akarunk a pálya elejéről elindítani, hogy az végighaladva a félkörön, ugyanoda érkezzék vissza.Legalább milyen hosszúnak kell lennie a pálya vízszintes részének? A súrlódás elhanyagolható.*



1. ábra

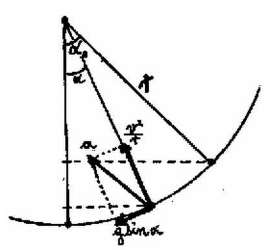
(Vermes Miklós)

Megoldás. A tetőponton legalább akkora v_0 sebesség szükséges, hogy $mv_0^2/r = mg$ alapján a test le ne essék; ez a sebesség $v_0 = \sqrt{rg}$. A tetőpontról, $2r$ magasságból történő leesés ideje $\sqrt{4r/g}$. Ezalatt a v_0 sebességgel megtett út $x = v_0\sqrt{4r/g}$, v_0 értékét felhasználva $x = 2r$. Ez a legrövidebb távolság, mert nagyobb v_0 esetén messzebb esik le a test. (Az esés ideje ugyanannyi.)

2. *Egy fonálingát* $45°$*-os helyzetből elengedünk. Mozgás közben mely helyzetben lesz a legkisebb a gyorsulása?(Vermes Miklós)*

Megoldás. Az α szöghöz tartozó helyzetben a gyorsulás érintőleges összetevője $g\sin\alpha$, a centrum felé mutató összetevője v^2/r (2. ábra). Az α helyzethez tartozó sebesség az energiamegmaradás törvényével számítható:

$$mv^2/2 = mg(r\ \cos\alpha - r\ \cos 45°), \quad v^2 = 2gr(\cos\alpha - \cos 45°).$$



2. ábra

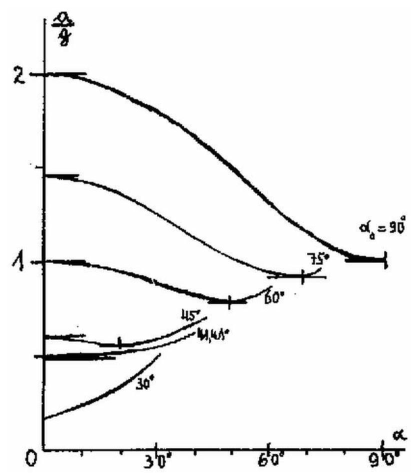
Ennek alapján a gyorsulás centrum felé mutató összetevője $2g(\cos\ \alpha - \sqrt{2}/2)$. A teljes gyorsulás:

$$a = g\sqrt{\sin^2\alpha + 4(\cos\alpha - \sqrt{2}/2)^2} = g\sqrt{3\cos^2\alpha - 4\sqrt{2}\cos\alpha + 3}.$$

A gyorsulás akkor a legkisebb, amikor a gyökjel alatti mennyiség a legkisebb. A gyökjel alatti mennyiség cos α-nak másodfokú függvénye. Mivel $ax^2 + bx + c$ az $x = -b/2a$ helyen minimális, így a gyorsulás akkor a legkisebb, ha

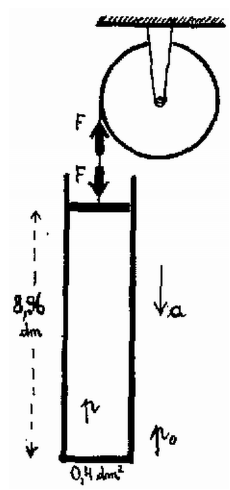
$$\cos\ \alpha_m = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0{,}9428,\ \ \alpha_m = 19{,}47°.$$

Ha az indítási szög (α_0) a függőlegestől mérve kisebb vagy egyenlő, mint $41,41°$=arc cos 0,75, akkora gyorsulás $\alpha = 0$ esetén minimális. Vízszintes helyzetből történő indítás esetében a gyorsulás az indításkor a legkisebb. A különböző esetekről áttekintést nyújt a 3. ábra.



3. ábra

3. *A fonálon lógó dugattyú tömege* 25 kg *és a héliumgázt tartalmazó hengeres edény tömege szintén* 25 kg *(4. ábra). A henger alapterülete* 0,4 dm^2 *és a dugattyú távolsága a henger fenekétől* 8,96 dm. *A fonál egy* 0,2 m *sugarú,* 3 $\mathrm{kg\cdot m^2}$ *tehetetlenségi nyomatékú hengerre van felcsévélve. A gázt tartalmazó henger és a dugattyú állandó gyorsulással esnek.*



4. ábra

Mennyi a hengerbe zárt héliumgáz tömege? A súrlódás mindenütt elhanyagolható. A külső légköri levegő nyomása $p_0 = 10\ \mathrm{N/cm^2}$, *a hőmérséklet* 0 C°, $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

(Vermes Miklós)

Megoldás. Jelöljük a fonálban fellépő erőt F-fel! A dugattyú és a henger között semmiféle erőhatás nincs. A hengert a belső p és a külső p_0 nyomásokból származó erő mozgatja a gyorsulással (természetesen a gázzal együtt, de a gáz tömegét most elhanyagolhatjuk):

$$25\ \mathrm{kg}\cdot a = 250\ \mathrm{N} - (10\ \mathrm{N/cm^2} - p)\cdot 40\ \mathrm{cm^2}.$$

A dugattyút a súlyból és nyomáskülönbségből származó erő viszi lefelé, a fonálerő húzza felfelé:

$$25\ \mathrm{kg}\cdot a = 250\ \mathrm{N} + (10\ \mathrm{N/cm^2} - p)\cdot 40\ \mathrm{cm^2} - F.$$

A csapágyazott hengert az F fonálerő $0{,}2\ \mathrm{m}\cdot F$ forgatónyomatékkal forgatja, a létrejövő szöggyorsulás $a/0{,}2\ \mathrm{m}$, így a forgás törvénye szerint

$$0{,}2\ \mathrm{m}\cdot F = (a/0{,}2\ \mathrm{m})\cdot 3\ \mathrm{kg\cdot m^2}.$$

A háromismeretlenes egyenletrendszer megoldása:

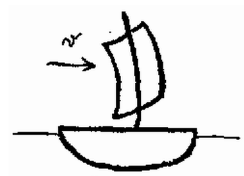
$$F = 300\ \mathrm{N} \quad a = 4\ \mathrm{m/s^2}, \quad p = 6{,}25\ \mathrm{N/cm^2}.$$

Ismerve a hengerbe zárt héliumgáz nyomását és térfogatát ($0{,}4\ \mathrm{dm^2}\cdot 8{,}96\ \mathrm{dm} = 3{,}584\ \mathrm{dm^3}$), kiszámíthatjuk a $10\ \mathrm{N/cm^2}$ nyomás melletti V_0 normáltérfogatát:

$$V_0 = \frac{6{,}25(\mathrm{N/cm^2})\cdot 3{,}584\ \mathrm{dm^3}}{10\ \mathrm{N/cm^2}} = 2{,}24\ \mathrm{dm^3}$$

Ez éppen a moltérfogat tizede, tehát a héliumgáz tömege 0,4 g.

4. *Egy vitorláshajó hátszéllel halad a tavon (5. ábra). A szél sebessége* $v = 10$ m/s. *A vitorlára ható közegellenállási erő arányos a sebesség négyzetével; az arányossági tényező* $k_1 = 64\ \mathrm{N/(m/s)^2}$. *A víz alatti részre ható közegellenállási erő szintén arányos a hajó u-val jelölt sebességének négyzetével, az arányossági tényező* $k_2 = 4\ \mathrm{N/(m/s)^2}$. *Mennyi a hajó sebessége?*



5. ábra

(Lugosi Erzsébet)

Megoldás. A $v - u$ sebességű légáramlat a vitorlát $k_1(v-u)^2$ erővel nyomja. Ez az erő egyenlő a víz alatti részre ható k_2u^2 közegellenállási erővel:

$$k_1(v-u)^2 = k_2u^2.$$

Rendezve:

$$(k_1 - k_2)u^2 - 2k_1vu + k_1v^2 = 0.$$

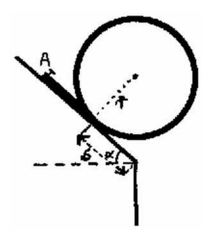
Ennek megoldása:

$$u = \frac{k_1/k_2 \pm \sqrt{k_1/k_2}}{k_1/k_2 - 1}v.$$

Az első gyök $1{,}33v$, a szélnél nagyobb sebességet jelent, így értelmetlen. A második gyök adja meg a helyes eredményt: $u = 0{,}8v = 8$ m/s.

A II. forduló feladatai

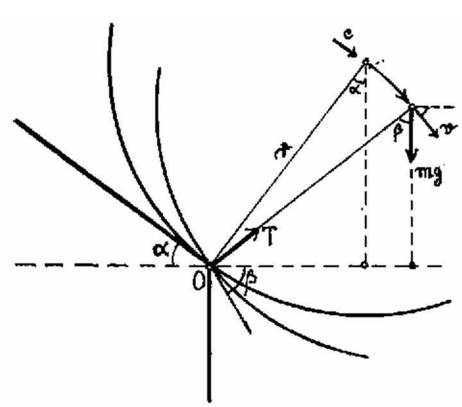
1. *Egy* $r = 0{,}3$ m *sugarú tömör hengerre papírszalagot csévéltünk, és ennek a végét az A pontban rögzítettük egy* $\alpha = 36{,}87^\circ$ *hajlásszögű lejtőn (6.ábra). A hengert a lejtő végétől* $s = 0{,}16$ m *távolságból elengedjük. Mekkora és milyen irányú a henger középpontjának a sebessége, amikor a henger elhagyja a lejtőt?* $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.



6. ábra

(Vermes Miklós)

Megoldás. A henger középpontja c sebességgel érkezik a lejtő széléhez (7. ábra).



7. ábra

Ez a sebesség az energiamegmaradás törvényével számítható:

$$mgs \cdot \sin\ \alpha = \frac{1}{2} \cdot mc^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{mc^2}{2} = \frac{3mc^2}{4},$$

innen

$$c = \sqrt{\frac{4gs \cdot \sin\alpha}{3}} = 1{,}131\ \mathrm{m/s}.$$

Ezután a henger lebillen O körül forogva. Egy bizonyos β szögű helyzetben a középpont sebessége legyen v, amelynek nagysága ismét az energiamegmaradás törvényével számítható:

$$\frac{mc^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{mc^2}{2} + mgr(\cos\ \alpha - \cos\ \beta) = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{mv^2}{2}.$$

Innen c előbbi értékének felhasználásával:

$$v^2 = \frac{3c^2 + 4gr(\cos\ \alpha - \cos\ \beta)}{3} = \frac{4g(s\ \sin\ \alpha + r\ \cos\ \alpha - r\ \cos\ \beta)}{3}.$$

A körmozgáshoz szükséges $mr\omega^2 = mv^2/r$ nagyságú erőt a súlyerő $mg\cos\beta$ összetevőjének és a T támaszerőnek a különbsége szolgáltatja:

$$\frac{mv^2}{r} = mg\cos\beta - T.$$

Az elválás abban a β_0 szögű helyzetben történik, amikor a T támaszerő nulla, vagyis

$$mg\cos\beta_0 = \frac{mv^2}{r}.$$

A megcsúszást megakadályozza a papírszalag. Felhasználva v^2 értékét:

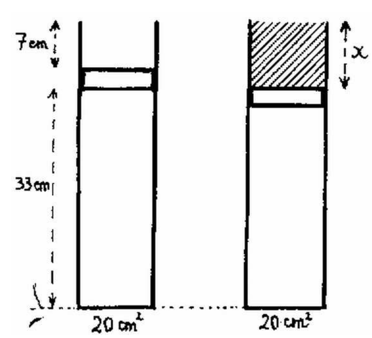
$$g\cos\beta_0 = \frac{4g(s\sin\alpha + r\cos\alpha - r\cos\beta_0)}{3r}.$$

Innen $\cos\beta_0$ (függetlenül g-től):

$$\cos\beta_0 = \frac{4g(s\sin\alpha + r\cos\alpha)}{7r} = 0{,}64, \quad \beta_0 = 50{,}21^\circ.$$

A sebesség nagysága: $v_0 = \sqrt{rg\cos\beta_0} = 1{,}386$ m/s. A sebesség iránya $\beta_0 = 50{,}21^\circ$-kal lefelé irányul a vízszinteshez képest. Ezzel meghatároztuk a sebesség nagyságát és irányát a lejtő elhagyásának pillanatában.

2. *Egy* 20 cm^2 *alapterületű hengerben* 7,2 kg *tömegű, súrlódásmentes dugattyú zár el* 33 cm *magas,* 0 °C *hőmérsékletű légoszlopot. A hengerben a dugattyú felett még* 7 cm *magas üres rész van. A külső légnyomás* 10 N/cm^2*, a higany sűrűsége* 13,6 g/cm^3*, a bezárt levegő kezdeti sűrűsége* 1,8 g/dm^3*, állandó térfogat melletti fajhője* 0,7 J/gK, $g = 10$ m/s^2 *(8. ábra.)*



8. ábra

a) *Mekkora az a legnagyobb higanymennyiség, amit a dugattyú fölé tölthetünk (állandó hőmérséklet mellett)?*

b) *A maximális higanymennyiség betöltése után a levegőt lassan felmelegítjük, amíg az összes higany ki nem csurog. E kísérlet elvégzése közben mennyi hőt kellett a bezárt levegővel közölnünk?*

(Vermes Miklós)

Megoldás. *a)* A dugattyú súlya által okozott nyomás 72 N/20 cm^2 = 3,6 N/cm^2. A levegő térfogata kezdetben 20 cm$^2 \cdot$ 33 cm = 660 cm^3, nyomása 10 N/cm^3 + 3,6 N/cm^2 = 13,6 N/cm^2. Ha x magasságú higanyoszlop kerül a dugattyú fölé, akkor a levegő térfogata $(33\ \mathrm{cm} + 7\ \mathrm{cm} - x) \cdot 20\ \mathrm{cm}^2$, a levegő nyomása $\left[10\ \mathrm{N/cm}^2 + 3{,}6\ \mathrm{N/cm}^2 + 0{,}136(\mathrm{N/cm}^3) \cdot x\right]$.

Boyle–Mariotte törvénye alapján

$$13{,}6\ (\mathrm{N/cm}^2) \cdot 660\ \mathrm{cm}^3 = \left[10\ \mathrm{N/cm}^2 + 3{,}6\ \mathrm{N/cm}^2 + 0{,}136\ (\mathrm{N/cm}^3) \cdot x\right] \cdot (33\ \mathrm{cm} + \\ +7\ \mathrm{cm} - x) \cdot 20\ \mathrm{cm}^2.$$

Az egyenlet fizikailag értelmes megoldása $x = 10$ cm. Tehát a higany térfogata 200 cm^3, tömege 2720 g.

b) Ha ebben a folyamatban a kezdeti és végső állapotot összehasonlítjuk, változatlan nyomás mellett növekedett a levegő térfogata $(33 \cdot 20)$ cm^3-ről $(40 \cdot 20)$ cm^3-re. Így az utóbbi állapothoz tartozó hőmérséklet:

$$T = \frac{(40 \cdot 20)\ \mathrm{cm}^3}{(33 \cdot 20)\ \mathrm{cm}^3} \cdot 273\ \mathrm{K} = 331\ \mathrm{K}, \quad t = 58\ ^\circ\mathrm{C}.$$

A levegő tömegét megadja kezdeti térfogatának és sűrűségének szorzata: $0{,}66\ \mathrm{dm}^3 \cdot 1{,}8\ \mathrm{g/dm}^3 = 1{,}188$ g. A belső energia növeléséhez szükséges hő

$$0{,}7\ \mathrm{J/gK} \cdot 1{,}188\ \mathrm{g} \cdot 58\ \mathrm{K} = 48{,}23\ \mathrm{J}.$$

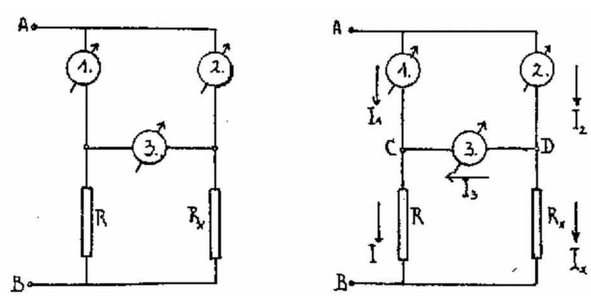
A melegítés közben a gáz nyomása

$$10\ \mathrm{N/cm}^2 + 3{,}6\ \mathrm{N/cm}^2 + 0{,}136\ \mathrm{N/cm}^3 \cdot 10\ \mathrm{cm} = 14{,}96\ \mathrm{N/cm}^2$$

értékről lineárisan csökken 13,6 N/cm^2-re, az átlagos nyomás 14,28 N/cm^2, a térfogatváltozás 200 cm^3, így a munkavégzés 28,56 J.

Hő formájában a belső energia növelésére és a munkavégzés pótlására 48,23 J + 28,56 J = 76,79 J szükséges.

3. *A 9. ábrán látható kapcsolásban a három árammérő teljesen egyforma, ellenállása $R_0 = 2\ \Omega$. Az A és B pontok között a potenciálkülönbség állandóan* 19 V. *Az 1. árammérő $I_1 = 2{,}5$ A-t, a 2. árammérő $I_2 = 1{,}5$ A-t jelez.*



9. ábra

a) *Mekkora áramot jelez a 3. árammérő?*

b) *Vizsgáljuk meg, hogyan változik az I_3 áramerősség, ha az R_x ellenállást változtatjuk?*

(Nagy László)

Megoldás. *a*) Felírjuk a feszültségesést az A és C pontok között az 1., illetve a 2. és a 3. ampermérőkön keresztül:

$$I_1R_0 = I_2R_0 + I_3R_0, \text{ innen}$$
$$I_3 = 1\ \mathrm{A}.$$

b) Az áramelágazás törvénye szerint a D pontban

$$I_2 = I_2 + I_x,$$

a C pontban

$$I = I_1 + I_3.$$

A feszültségesés A és C között, az 1., illetve a 2. és a 3. ampermérőn keresztül:

$$I_1R_0 = I_2R_0 + I_3R_0.$$

A feszültségesés D és B között, az R_x ellenálláson, illetve az R ellenálláson és a 3. ampermérőn keresztül:

$$I_xR_x = I_3R_0 + IR.$$

R értéke az eredeti állapotból meghatározható. Ekkor AC között $R_0 I_1 = 5$ V a feszültség, így C és B között 19 V$-$5 V = 14 V a feszültség. Az R-en keresztül folyó áramerősség pedig $I_1 + I_3 =$ 3,5 A, tehát $R = 14$ V/3,5 A = 4 Ω.

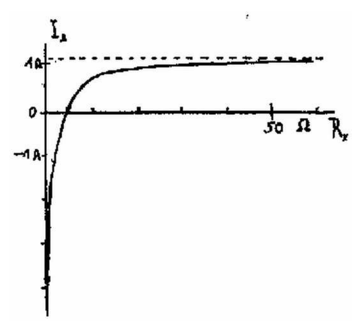
A teljes 19 V feszültség az ACB úton:

$$19\ \mathrm{V} = I_1 R_0 + IR.$$

Ezt a kiegyensúlyozatlan Wheatstone-hídra jellemző egyenletrendszert megoldva kapjuk I_3 függését R_x től:

$$I_3 = \frac{19\ \mathrm{V}\cdot(R_x - R)}{(2R_0 + 3R)R_x + R_0(R_0 + 2R)} = \frac{19\ R_x - 76}{16\ R_x + 20}.$$

A függvény grafikonja hiperbola (10. ábra). $R_x = 0$-nál $I_3 = -3{,}8$ A; $R_x = 4$ Ω-nál $I_3 = 0$; $R_x = 32$ Ω-nál $I_3 = 1$ A; $R_x \to \infty$ esetén, I_3 értéke 1,1875 A-hez tart.

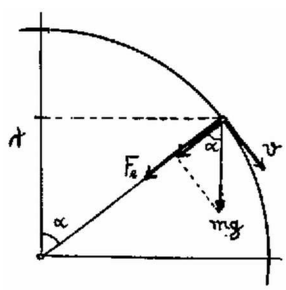


10. ábra

4. *Egy* 0,5 m *sugarú szigetelő anyagból álló, vékonyfalú gömbhéj középpontjában egy kicsiny, pozitív töltésű fémgolyó van, amely a gömbhéj felszínén* +1600 V *potenciált hoz létre. E gömbhéj tetejéről lecsúszik egy* 4 kg *tömegű kis test, amelynek valamilyen előjelű elektromos töltése van. A lecsúszó test akkor hagyja el a gömböt, amikor sebessége* 2 m/s. *A súrlódás elhanyagolható,* $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$. *Mekkora a lecsúszó test töltése?*

(Légrádi Imre)

Megoldás. A lecsúszó test sebességét nem befolyásolja a töltés, mert az elektromos erő merőleges a pályára. Az energiamegmaradás törvényével kiszámítjuk, hogy mely szöghelyzetben hagyta el a kis test a gömböt (11. ábra):



11. ábra

$$\frac{mv^2}{2} = mgr(1 - \cos\alpha),$$

innen

$$\cos\alpha = 1 - \frac{v^2}{2gr} = 0{,}6, \quad \alpha = 53{,}13°.$$

Ebben a helyzetben volt az mg súly $mg\cos\alpha$ összetevőjének és az elektromos vonzóerőnek, $9\cdot 10^9(\mathrm{Nm^2/C^2})\cdot Qq/r^2$-nek az összege éppen egyenlő körmozgást létrehozó mv^2/r erővel:

$$\frac{mv^2}{r} = mg\cos\alpha + \frac{9\cdot 10^9(\mathrm{Nm^2/C^2})\cdot Qq}{r^2}.$$

(Q a golyó középpontjában levő töltést, q a kis test töltését jelenti.) A numerikus adatokból látszik,hogy az elektromos vonzóerő nélkül a súly összetevője nem lenne képes a kis testet 53,13°-os szöghelyzetben a gömbön tartani. Különben is ismeretes, hogy a gömbről lecsúszó test arc cos (2/3)=48,19°-os szöghelyzetben hagyja el a gömb felszínét. A mi esetünkben a kis test lejjebb jutott, tehát töltése negatív.

A gömb közepén levő test töltését az általa létrehozott $U = 9 \cdot 10^9\ (\mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2) \cdot Q/r = 1600$ V feszültségből tudjuk meg, innen $Q = Ur/(9 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2)$. Így az előbbi összefüggés alapján a kis test töltése:

$$q = (m/U)(v^2 - gr\ \cos\ \alpha) = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}.$$

A III. Kisérleti forduló

A versenyzők egy, a felületi feszültség következtében kialakult henger alakú felszín mozgását tanulmányozták.

Vermes Miklós