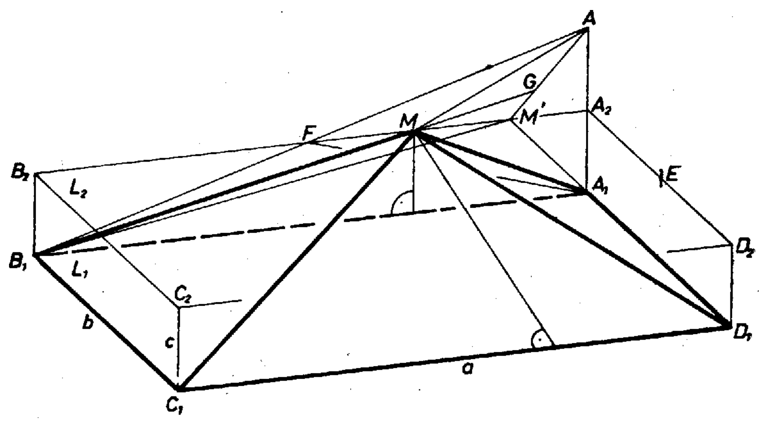
Legyenek az L_i lap egymás utáni csúcsai A_i, B_i, C_i, D_i $(i = 1, 2)$ és a téglatest éleinek hossza $A_1B_1 = a$, $A_1D_1 = b$, $A_1A_2 = c$. Mivel L_1 is, L_2 is önmagába megy át az A_2B_2 és az A_2D_2 él felező merőleges síkján való tükrözéssel, azért elég gúlánk felszínét addig vizsgálni, míg M csúcsa bejárja L_2 kerületének negyedrészét, az EA_2 és A_2F szakaszt, ahol E az A_2D_2 él, F pedig az A_2B_2 él felezőpontja. Sőt, minőségileg elég lesz az A_2F szakaszra szorítkozni, mert az itt adódó eredményeink az a, b betűk cseréjével megadják az A_2E szakaszon mozgó M-re vonatkozó eredményeket.



A felszín változásának vizsgálatában az állandó L_1 alapot figyelmen kívül hagyhatjuk. Ugyanígy az MA_1B_1, MC_1D_1 oldallapokat is, mert területük állandó, hiszen korlátozásunk szerint közös M csúcsuk az A_1B_1, illetőleg C_1D_1 alapjukkal párhuzamos egyenesen mozog.

A változó területű MA_1D_1 és MB_1C_1 oldallapok együttes területéről megmutatjuk, hogy szigorúan monoton nő, míg M az F-től A_2-ig halad; így $M = F$ esetén minimuma, $M = A_2$ esetén maximuma van a gúla felszínének. Valóban, e két lap területének 2-szerese

$$b \cdot MA_1 + b \cdot MB_1 = b(A_1M + MB_1).$$

hiszen e lapok A_1-nél, illetve B_1-nél levő szöge derékszög; így csak a zárójelbeli összeget kell vizsgálnunk. Legyen A_1-nek az A_2B_2 egyenesre való tükörképe A, így M-nek minden tekintett helyzetében

$$A_1M + MB_1 = AM + MB_1 \geqq AB_1 = AF + FB_1 = A_1F + FB_1,$$

és egyenlőség akkor és csakis akkor áll, ha M az F-ben van, hiszen F az AB_1 szakaszt is felezi.

Ha mármost M' az A_2M szakasznak M-től különböző belső pontja és $A_2M < A_2F$, akkor a B_1M és AM' egyenesek G metszéspontja az AM' szakasznak, M pedig a GB_1 szakasznak belső pontja, így a háromszög–egyenlőtlenséget az AMG és GB_1M' háromszögekre alkalmazva

$$\begin{aligned} A_1M + MB_1 = AM + MB_1 < (AG + GM) + MB_1 = AG + GB_1 < AG + (GM' + M'B_1) = \\ = AM' + M'B_1 = A_1M' + M'B_1. \end{aligned}$$

Ugyanezzel a meggondolással a jobb oldal kisebb, mint $A_1A_2 + A_2B_1$, tehát a gúla csúcsát M-ből M'-be áttolva, a felszín valóban nő (nem is marad változatlanul). Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Meg lehetne még vizsgálni, hogy a felszínnek E-ben és F-ben adódó lokális minimumai közül melyik a kisebb, az abszolút minimum. (Ezt a feladat előre nem kérdezte, nem kérdez*het*te; hiszen elébe vágott volna a föltett kérdés eredményének.) Nos, a palástfelszínek 2-szeresei, a gúla csúcsát F-ben,illetőleg E-ben választva így írhatók:

$$\begin{gathered} ac + \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2} + \sqrt{a^2b^2 + 4b^2c^2}, \quad \text{illetve} \\ bc + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2} + \sqrt{a^2b^2 + 4a^2c^2}. \end{gathered}$$

Eszerint nagyságviszonyuknak pl. az $a > b$ föltevés mellett való megállapítása messze meghaladná azt a munkát, amit az alapfeladat megoldására végeztünk. Ezért megelégszünk a kérdés fölvetésével.

Megjegyzés. Az érkezett dolgozatok a változást a differenciálszámítás eljárásával vizsgálták, bár sokszor hiányosan. Vázoljuk ezt. Legyen a fenti jelölésekkel $A_2M = x$, ahol $0 \leqq x \leqq a$

A felszín nem változó tagjait, majd a nem változó (pozitív) tényezőt elhagyva az

$$f(x) = A_1M + MB_1 = \sqrt{x^2 + c^2} + \sqrt{(a-x)^2 + c^2}$$

függvény deriváltja valamely $0 < x < a$ helyen

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + c^2}} - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{c}{x}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{c}{a-x}\right)^2}};$$

Innen egyrészt nyilvánvaló, hogy $f'(x)$ akkor és csakis akkor tűnik el, ha $x = = a - x$, azaz $x = a/2$, másrészt látjuk, hogy $0 < x < a/2$ mellett $f'(x) < < 0$, hiszen az alakítás szerint első tagjának (pozitív) nevezője nagyobb, mint a második tag nevezője, tehát itt $f(x)$ fogy, és hasonlóan $a/2 < x < a$ mellett nő, tehát az $x = a/2$ helyen minimuma van. [Az eredeti alakból az is látható, hogy $f'(x)$ jobb oldali határértéke az $x = 0$ helyen ugyancsak negatív, és bal oldali határértéke az $x = a$ helyen ugyancsak pozitív.]