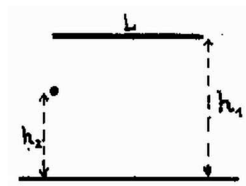
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat október 29-én rendezte 60. versenyét Budapesten és 11 vidéki városban az abban az évben érettségizettek és középiskolások részére. A versenyzők 5 órai munkaidő alatt oldhatták meg a három feladatot. Bármely segédeszköz használata meg volt engedve, beleértve a zsebszámítógépet is. A versenyen 240 dolgozatot adtak be. Ismertetjük a feladatokat és a verseny eredményét.

1. *Egy* $L = 1{,}528$ méter *hosszú pálcát vízszintes helyzetből,* $h_1 = 2{,}164$ méter *magasságból elejtünk* (1. ábra). *Esés közben a pálca baloldali vége rugalmasan ütközik egy* $h_2 = 1{,}364$ méter *magasságban levő szegbe. Az ütközéstől számítva mennyi idő múlva éri el a pálca jobboldali vége a talajt?* $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

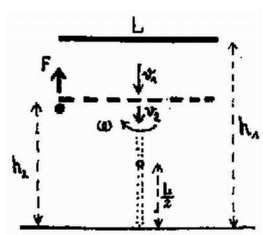


1. ábra

(Vermes Miklós)

Megoldás: Az esés törvénye szerint a szeghez érkezéskor a sebesség:

$$v_1 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = 4\ \mathrm{m/s}.$$



2. ábra

Következik a nem centrális ütközés (2. ábra). A szeghez ütődéskor igen rövid Δt ideig F erő ébred. A pálca középpontja egy új v_2 sebességgel megy tovább és ω szögsebességgel forogni kezd középpontja körül. Az erőt megadja az impulzus (lendület) időegységre jutó változása:

$$F = \frac{m(v_1 - v_2)}{\Delta t}.$$

A forgás törvénye szerint a forgatónyomaték egyenlő a szöggyorsulás és tehetetlenségi nyomaték szorzatával. A szöggyorsulást $\omega/\Delta t$ adja meg, a közepe körül forgó rúd tehetetlenségi nyomatéka pedig $mL^2/12$.

$$F \cdot \frac{L}{2} = \frac{\omega}{\Delta t} \cdot \frac{1}{12} \cdot mL^2.$$

A két egyenletből $F \cdot \Delta t$ kiküszöbölésével kapjuk:

$$v_1 - v_2 = \frac{\omega L}{6}.$$

Most figyelembe kell vennünk azt a körülményt, hogy az ütközés rugalmas, tehát a mechanikai energiák összege változatlan marad:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot mL^2.$$

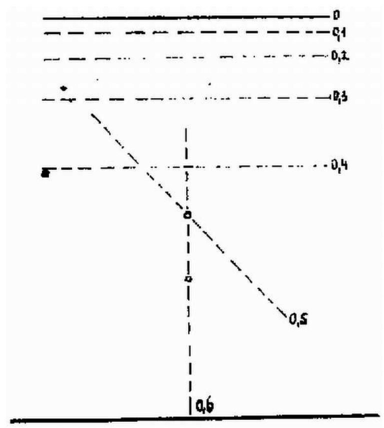
Az előző és a mostani egyenletből álló egyenletrendszer megoldása megadja a középpont haladó mozgásának sebességét az ütközés után és a forgás szögsebességét:

$$v_2 = \frac{v_1}{2} = 2\ \mathrm{m/s}, \qquad \omega = \frac{3v_1}{L} = 7{,}854\ \mathrm{s^{-1}}.$$

Ezután a pálca tömegközéppontja függőleges lefelé hajítást végez v_2 kezdősebességgel, és állandó ω szögsebességgel forog középpontja körül. A legkorábban akkor érheti el a pálca jobboldali vége a talajt, amikor középpontja $L/2$ magasságba ér. A lefelé hajítás útja ekkor $h_2 - L/2$. A hajítás úttörvényével:

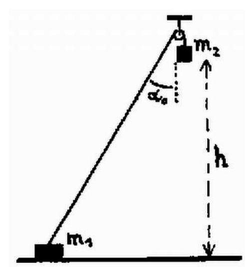
$$h_2 - \frac{L}{2} = v_1 t + \frac{g}{2} \cdot t^2,$$

számadatainkkal, rendezve: $5t^2 + 2t - 0{,}6 = 0$. Ennek megoldása $t = 0{,}2$ s. Ez az a legrövidebb időtartam, amelynek végén a pálca jobboldali vége a szeg elhagyása után a talajjal érintkezésbe kerülhet. Ezalatt az elforgás szöge $\omega t = 7{,}854 \cdot 0{,}2 = 1{,}57 = 90°$. Tehát a pálca épp 0,2 s múlva, függőleges helyzetben kerül érintkezésbe a talajjal. A 3. ábra tizedmásodpercenként ábrázolja a pálca helyzetét.



3. ábra

2. *Egy csigán átvetett fonál végeire $m_1 = 8$ kg és $m_2 = 6$ kg tömegű testeket erősítettünk (4. ábra). A csiga magassága az asztal felett $h = 4$ méter, a súrlódás elhanyagolható, $g = 10$ m/s^2. Az m_1 tömegű testet $\alpha_0 = 30°$-hoz tartozó szöghelyzetből elengedjük.*

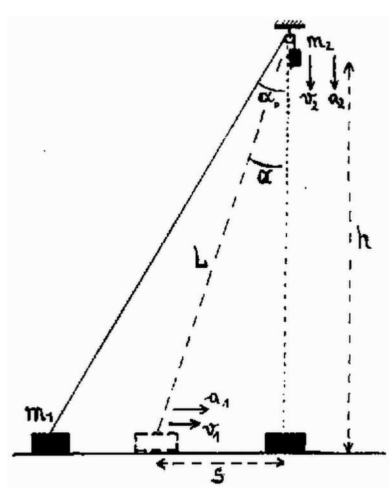


4. ábra

a) Mekkora gyorsulásokkal indulnak el a testek?
b) Mekkorák a testek sebességei és gyorsulásai, amikor az m_1 tömegű test éppen az m_2 tömegű test alatt halad át?
(Nagy László)

Megoldás. Keressük, hogy egy α szög által meghatározott helyzetben mekkorák a testek v_1 és v_2 sebességei, valamint a_1 és a_2 gyorsulásai. Az m_1 tömegű test Δs útjához a fonál $\Delta s \cdot \sin\alpha$ rövidülése tartozik, ezért a sebességek összefüggése (5. ábra):

$$v_2 = v_1 \sin\alpha.$$



5. ábra

Az energiamegmaradás törvénye szerint, ha az indítás α_0 fonálhelyzetből történt:

$$m_2 g(h/\cos\alpha_0 - h/\cos\alpha) = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Az egyenletrendszer megoldása szolgáltatja a sebességeket:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2m_2 gh(1/\cos\alpha_0 - 1/\cos\alpha)}{m_1 + m_2\sin^2\alpha}},$$
$$v_2 = \sin\alpha\sqrt{\frac{2m_2 gh(1/\cos\alpha_0 - 1/\cos\alpha)}{m_1 + m_2\sin^2\alpha}}.$$

Az indítás pillanatában természetesen mindkét sebesség nulla. A 0°-os helyzethez tartozóan $v_{20} = 0$ és

$$v_{10} = \sqrt{2gh\cdot\frac{m_2}{m_1}(1/\cos\alpha_0 - 1)} = 3{,}047\ \mathrm{m/s}.$$

A gyorsulások levezetéséhez szükségesek a következő geometriai összefüggések:

$$\sin\alpha = \frac{s}{\sqrt{s^2+h^2}},\quad v_2 = \frac{s}{\sqrt{s^2+h^2}}\cdot v_1,\quad L = \sqrt{s^2+h^2}.$$

Differenciáljuk az idő szerint v_2-t:

$$\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{s^2+h^2}\left[\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\sqrt{s^2+h^2} - s\cdot\frac{2s}{2\sqrt{s^2+h^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right]v_1 + \frac{s}{\sqrt{s^2+h^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t},$$
$$\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\left(\frac{L}{L^2} - \frac{s^2}{L^3}\right)v_1 + \frac{s}{L}\cdot\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}.$$

Figyelembe véve, hogy $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = -v_1$, valamint tekintettel a geometriai összefüggésekre kapjuk a gyorsulások közti kapcsolatot:

$$a_2 = -\frac{\cos^3\alpha}{h}\cdot v_1^2 + a_1\sin\alpha.$$

Szükségünk van a fonálerőre is. Ez m_1 tömeg esetében $F\sin\alpha = m_1 a_1$, az m_2 tömeg esetében $F = m_2(g - a_2)$. A fonálerőket egyenlővé téve:

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 \sin\alpha = m_2 g\sin\alpha.$$

A legutóbbi két egyenletünkből álló egyenletrendszert megoldva megkapjuk a gyorsulásokat. Felhasználva v_1 és v_2 előbb kiszámított értékeit is, az eredmények:

$$a_1 = \frac{m_2 g\sin\alpha}{(m_1 + m_2\sin^2\alpha)^2}\cdot[(m_1 + m_2\sin^2\alpha) + 2m_2\cos^3\alpha(1/\cos\alpha_0 - 1/\cos\alpha)],$$
$$a_2 = \frac{m_2 g}{(m_1 + m_2\sin^2\alpha)^2}[(m_1 + m_2\sin^2\alpha)\sin^2\alpha - 2m_1\cos^3\alpha(1/\cos\alpha_0 - 1/\cos\alpha)].$$

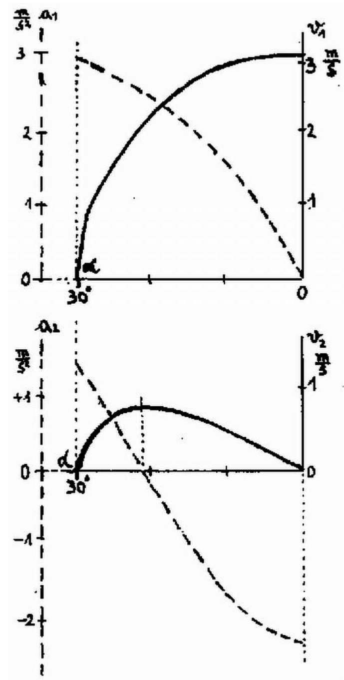
Az indulás pillanatában a gyorsulások:

$$a_{1i} = g\cdot\frac{m_2\sin\alpha_0}{m_1 + m_2\sin^2\alpha_0} = 3{,}158\ \mathrm{m/s^2},$$
$$a_{2i} = g\cdot\frac{m_2\sin^2\alpha_0}{m_1 + m_2\sin^2\alpha_0} = 1{,}579\ \mathrm{m/s^2}.$$

Az $\alpha = 0°$-hoz tartozó gyorsulások:

$$a_{10} = 0,\quad a_{20} = -g\cdot\frac{2m_2}{m_1}(1/\cos\alpha_0 - 1) = -2{,}321\ \mathrm{m/s^2}.$$

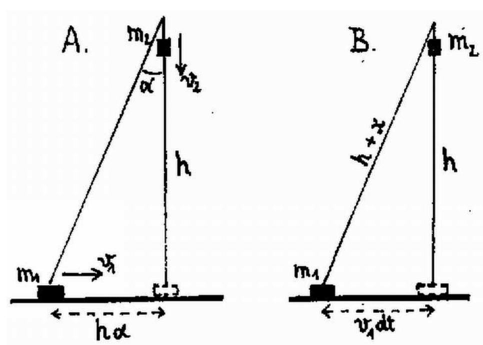
A 6. ábra a sebességek és gyorsulások α szögtől való függését mutatja.



6. ábra

Ha csak a feladott kérdésekben szereplő speciális értékekre van szükség, akkor sokkal rövidebben járhatunk el úgy, hogy egyenleteinkben már kezdettől fogva $\alpha_0 = 30^\circ$, illetve 0°-ot használunk.

Speciális közelítő eljárások is vannak α_{20} kiszámítására (7. ábra). Lássunk ezek közül kettőt!



7. ábra

A. A fonál ω szögsebességgel közeledik a függőleges helyzethez. Az m_1 tömegű test utolsó útdarabja egyrészt $h\alpha$, másrészt $\omega\,\mathrm{d}t \cdot h$, $h\alpha = \omega\,\mathrm{d}t \cdot h$, vagyis $\mathrm{d}t = \alpha/\omega$. Ezalatt csökken a sebesség $v_1 \sin\alpha$-ról 0-ra, tehát a sebességváltozás $\mathrm{d}v_2 = -v_1 \sin\alpha$. A keresett gyorsulás:

$$a_{20} = \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = \frac{-v_1 \sin\alpha}{\alpha/\omega} = -\frac{v_1^2}{h} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} = -\frac{v_1^2}{h}.$$

B. A függőleges fonálhelyzethez közel, amikor az m_1 tömegű test egyenletesen mozog v_1 sebességgel, Pitagorasz–tétellel:

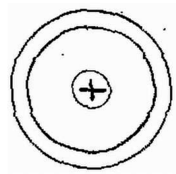
$$(h+x)^2 = h^2 + (v_1\,\mathrm{d}t)^2, \quad \text{ebből} \quad x = \frac{v_1^2\,(\mathrm{d}t)^2}{2h}.$$

Az m_2 tömegű test közelítően egyenletesen lassulva mozog a megállásig, ezért $x = -a_{20}\,(\mathrm{d}t)^2/2$. A két x-re kapott értéket egyenlővé téve $a_{20} = -v_1^2/h$.

3. *A világűrben elektromosan semleges, belül üres, zárt vezető gömbhéj lebeg. Közepében kicsiny, pozitív töltésű fémgolyó nyugszik szabadon. Távoli kondenzátorlemezek segítségével a gömb alakú „Faraday-kalitka" körül homogén elektromos teret hozunk létre. Mozgásba jön-e a kicsiny fémgolyó, illetőleg a gömbhéj és ha igen, miképpen?*

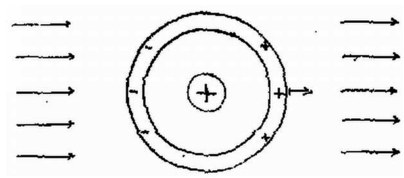
(Károlyházy Frigyes)

Megoldás. A külső tér nélkül a kis fémgolyó a gömbhéj középpontjában (labilis) egyensúlyi helyzetben van (8. a ábra).

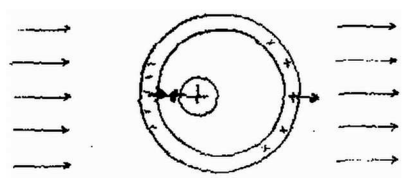


8. a ábra

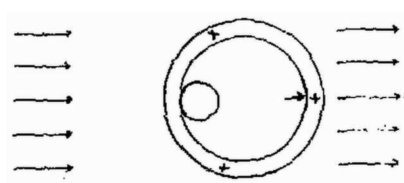
A külső tér létrehozásának pillanatában a gömbhéjon megosztott töltések mutatkoznak. Így a kis fémgolyót a gömbhéj árnyékoló hatásával védi a külső tértől. Ezért a külső tér bekapcsolásának pillanatában a kis fémgolyó gyorsulása még nulla. A gömbhéjnak az ábra szerinti bal oldalán a fémgolyó által létrehozott tér és a külső tér ellentétes irányú, a jobb oldalon pedig azonos irányú. A gömbhéjon a töltésmegosztásból származó negatív töltésekre ható eredő erő ezért kisebb lesz, mint a pozitív töltésekre ható eredő erő. A gömbhéj ezért a külső tér bekapcsolásának pillanatában jobbra indul el.(8. b ábra). Amikor a gömbhéj már elmozdult, a fémgolyó már nem lesz a középpontban. Ekkor a fémgolyón levő pozitív töltés is töltésmegosztást hoz létre a gömbhéjon. E töltések hatására a fémgolyó a hozzá közelebb eső oldalon levő negatív töltések irányába, tehát balra indul el (8. c ábra). Amint a golyó és a gömbhéj összeér, az egész fémtárgy pozitív töltésű lesz, és a tér által megszabott irányban (az ábra szerint jobbra) gyorsulva mozog (8. d ábra).



8. b ábra



8. c ábra



8. d ábra

A verseny eredménye

I. díjat ketten kaptak egyenlő helyezésben: *Árkossy Ottó,* a budapesti Semmelweis Orvostudományi Egyetem hallgatója, aki Esztergomban a Dobó Katalin Gimnáziumban érettségizett mint Sipos Imre tanítványa és *Erdős László* a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium IV. o. tanulója, tanára Koltai Mária.

II. díjat kapott *Fodor Gyula,* a budapesti Móricz Zsigmond Gimnázium IV. o. tanulója, tanára Tarnócziné Gedeon Melitta.

III. díjat ketten kaptak egyenlő helyezésben: *Csillag Péter,* a budapesti Landler Jenő Gépészeti és Híradástechnikai Szakközépiskola IV. o. tanulója és *Frei Zsolt,* a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karának fizikus hallgatója, aki Pécsett a Nagy Lajos Gimnáziumban érettségizett mint Kállai Miklósné és Tornyos Tivadar tanítványa.

Dicséretet hárman kaptak egyenlő helyezésben: *Kovács Tamás,* a debreceni Kossuth Lajos Gimnázium IV. o. tanulója, tanára Szegedi Ervin, továbbá *Náray Miklós* honvéd, aki Budapesten érettségizett az I. István Gimnáziumban mint Moór Ágnes tanítványa és *Sczigel Gábor* honvéd, aki Budapesten az Apáczai Csere János Gimnáziumban érettségizett, mint Holics László tanítványa.

Az 1. feladatot a felsoroltakon kívül teljesen megoldották még a következő versenyzők: *Drobni András* (Bp. I. István G. IV. o. t.: Cseh Géza), *Mandzsu Zoltán* (Bp. Fazekas M. G. IV. o. t.: Horváth Gábor), *Rácz Attila* (Sopron, Berzsenyi D. G. IV. o. t.: Nagy Márton), *Szakállas Gyula* (Zalaegerszeg, Zrínyi M. G. IV. o. t.: Gódor Győzőné), *Törőcsik Jenő* honvéd (érettségizett Bp. Fazekas M. G. t.: Horváth Gábor).

A 2. feladatot a nyerteseken kívül teljesen megoldották még a következő versenyzők: *Beke Sándor* honvéd (érettségizett Miskolc, Földes F. G. t.: Zámborszky Ferenc), *Fáth Gábor* (Bp. Fazekas M. G. IV. o. t.: Horváth Gábor), *Gaál Péter* (Bp. Apáczai Cs. J. G. o. t.: Zsigri Ferenc), *Megyesi Gábor* (Szeged, Ságvári E. G. III. o. t.: Juhászné Mészáros Mária), *Pfeil Tamás* (Dunaújváros, Münnich F. G. III. o. t.: Székelyi Sándorné).