I. megoldás. Az állítást indirekt úton bizonyítjuk be. Tételezzük fel, hogy csak véges sok számot karikáztunk be. A bekarikázott számok halmaza nem üres: az első számot mindenképpen be kell karikáznunk. Ekkor a bekarikázott számok között van legnagyobb, legyen ez N. Tekintsük a „valamilyen sorrendben” leírt természetes számok közül az első $(N+1)$ darabot. Mivel minden számot egyszer írtunk le, azért ez az $(N+1)$ szám mind különböző természetes szám.

Megmutatjuk, hogy ezen $(N+1)$ szám egyike sem nagyobb N-nél.

a) A bekarikázottak nem lehetnek nagyobbak N választása miatt.

b) A be nem karikázott számok a feladat feltétele szerint kisebbek, mint ahányadik helyen állnak. Így az első $(N+1)$ helyen álló be nem karikázott számok közül sem lehet N-nél nagyobb.

Így arra jutottunk, hogy $(N+1)$ különböző természetes számunk van, amelyek közül egyik sem nagyobb N-nél. Ezzel ellentmondásra jutottunk, vagyis az eredeti állítás igaz.

Horváth Eszter (Budapest, Ságvári E. Gyak. Gimn. IV. o. t.)

II. megoldás. A „valamilyen sorrendben” leírt természetes számok közül az i-edik helyen álló legyen a. Tekintsük a sorozat első k elemét. Ezek összegét nem növeljük, ha helyette a $\sum_{i=1}^{k} i$ összeget vesszük, vagyis

$$\sum_{i=1}^{k}(a_i - i) \geq 0 \qquad (k \geq 1). \tag{1}$$

A bizonyítást ismét indirekt úton végezzük. Tegyük fel, hogy az a_i, számok közül csak véges sokat karikáztunk be, azaz csak véges sok számra teljesül, hogy $(a_i - i) \geq 0$. Legyen a bekarikázott számok közül az utolsónak a sorszáma m ($m \geq 1$, hiszen az első számot feltétlenül bekarikázzuk). Legyen

$$\sum_{i=1}^{m}(a_i - i) = s. \tag{2}$$

Az $(m+1)$-edik elemtől kezdve az indirekt feltevés következtében egy elem sincs bekarikázva, így $(a_i - i) < 0$, ha $i \geq m+1$. Mivel a_i és $\boldsymbol{i}$ természetes számok, $a_i - i \leq -1$ $(i \geq m+1)$, és ezért

$$\sum_{i=m+1}^{m+s+1}(a_i - i) \leq (-1)(s+1) = -s-1. \tag{3}$$

Összeadva (2)-t és (3)-t

$$\sum_{i=1}^{m+s+1}(a_i - i) \leq -1.$$

Ez azonban (1) miatt lehetetlen. Ellentmondásra jutottunk: indirekt feltevésünk hibás volt, vagyis végtelen sok számot kellett bekarikáznunk.

Somogyi Antal (Budapest, Móricz Zs. Gimn. IV. o. t.)