Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

I. forduló

1. Egy tartályba egy csapon át 600 liter/perc sebességgel 30 %-os szörp ömlik. Háromnegyed óra múlva egy másik csapot is megnyitnak, ezen 40 %-os szörp folyik be, 800 liter/perc sebességgel. Mennyi idő múlva lesz a tartályban a szörp 35 %-os?

2. Legyen A és B egy kör átmérőjének a két végpontja. Szerkesszük meg a kör kerületén azokat az X pontokat, amelyekhez húzható körérintő az átmérő meghosszabbítását olyan C pontban metszi, amelyre $AX = CX$!

3. – Nem tudod – kérdezte a lottóhúzás napján egy matematikus a kollégáját –, hogy milyen számokat húztak ki?
– Képzeld – felelte az – , van köztük olyan szám, amellyel bármely két kihúzott szám összege osztható!
– Mi ez a szám?
– Ha megmondanám, kitalálnád a nyerőszámokat.
– Legalább azt mondd meg, páros-e vagy páratlan ez a szám? – kérdezte a matematikus, majd a válasz után felkiáltott: – Ötösöm van!
Mi volt az öt nyerőszám, ha a telitalálattal rendelkező matematikus csak egy szelvénnyel játszott? (Feltesszük, hogy mindketten jól okoskodtak és persze igazat mondtak.)

4. Ábrázoljuk az (egész számegyenesen értelmezett)

$$x \to \Big|\big||x|-1\big|-1\Big|-1 \quad \text{függvényt!}$$

5. Az ABC háromszög C csúcsánál levő szöge derékszög. CB oldalán a C-től távolodva fölvett A_1, A_2, …, A_n pontokra teljesüljön, hogy az AA_1, AA_2, …, AA_n egyenesek az A-nál levő szöget $n+1$ egyenlő részre osztják.
Bizonyítsuk be, hogy ekkor $CA_1 < A_1A_2 < \ldots < A_nB$!

6. Egy sakkversenyen n nő és $2n$ férfi vett részt. Mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. Nem volt döntetlen és a nők által megnyert játszmák száma úgy aránylik a férfiak által megnyert játszmák számához, mint $7:5$. Hány nő vett részt a játékban?

7. Jelöljünk ki egy négyzetlapon öt pontot úgy, hogy a pontok között föllépő legkisebb távolság a lehető legnagyobb legyen. Mekkora ez a távolság?

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely n páratlan természetes számra $n^{1984}-1$ osztható 2^8-nal.

II. Forduló

Az általános tantervű osztályok feladatai

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} |x-y| &= 7,\\ |x|+|y| &= 8. \end{aligned}$$

2. Létezik-e olyan érintőötszög, melynek oldalai – valamilyen sorrendben – 1, 2, 3, 4, 6 egység hosszúak? (Érintőötszögnek azt az ötszöget nevezzük, amelybe írható olyan kör, amely az ötszög mindegyik oldalát annak belső pontjában érinti.)

3. Egy 8×8-as sakktáblán 42 figura van. Mutassuk meg, hogy van legalább egy olyan 4×4-es kis résztáblája, amelynek átlós mezőin legalább 4 figura áll. (A 4×4-es sakktábla átlós mezőinek azt a 8 mezőt nevezzük, amelyek e sakktábla két átlójára illeszkednek.)

A szakközépiskolások feladatai

1. Legyenek A és B kétjegyű természetes számok. Jelölje A^* az A, B^* pedig a B számjegyeinek megcserélésével adódó kétjegyű számot. Határozzuk meg az összes lehetséges olyan A-t és B-t, melyre $AB-1$ és A^*B^*-1 osztható 10-zel!

2. 7 db különböző nagyságú almából és 3 db különböző nagyságú barackból két csomagot készítünk. Hány különböző módon lehet ezt megtenni úgy, hogy mindkét csomagban 5 db gyümölcs, és ezek között legalább egy-egy barack legyen?

3. Megegyezik az általános tantervű osztályok 2. feladatával.

A speciális matematika tagozatos osztályok feladatai

1. Igazoljuk, hogy ha a, b, n olyan természetes számok, melyekre $a^{2n}-b^{2n}$ osztható 9-cel, akkor a^2-b^2 is osztható 9-cel.

2. A és B legyen két adott pont a síkon. Tegyük fel, hogy egyetlen körző áll rendelkezésünkre, és azzal is csak egy bizonyos rögzített r sugarú kört tudunk rajzolni, ahol $r > AB$. E körző segítségével szerkesszünk olyan C pontot a síkon, hogy az ABC háromszög szabályos legyen.

3. Megegyezik az általános tantervű osztályok 3. feladatával.

Haladók (II. osztályosok)

I. forduló

1. Az x és y valós számokról tudjuk, hogy $x + y > 0$. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$!

2. Ábrázoljuk a derékszögű koordinátarendszerben azokat az $(x;y)$ számpárokat, amelyekre $\big||x| - |y|\big| < 1$!

3. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra

$$5^{2n+1} \cdot 2^{2n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$$

osztható 38-cal!

4. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalainak hossza a és b, egyik szára felezőpontjának a másik szárra való merőleges vetülete ennek a szárnak egyik végpontjába esik. Számítsuk ki a trapéz területét!

5. Tegyük fel, hogy a, b és c 1-nél nagyobb és 100-nál kisebb egész számok, e és f pedig olyan 100-nál nagyobb egészek, melyekre teljesül $e + f = a + b + c$. Mutassuk meg, hogy $ef < abc$.

6. Egy egyenlő oldalú konvex ötszögben három átló hossza azonos. Bizonyítsuk be, hogy az ötszög szabályos!

7. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a

$$7\left[\sqrt{x}\,\right] + 1 = x$$

egyenletet ($[a]$ jelöli az a-nál nem nagyobb egész számok közül a legnagyobbat)!

8. Adott 20 különböző pozitív egész szám, mindegyik kisebb 70-nél. Mutassuk meg, hogy páronkénti különbségeik közt van négy egyenlő!

II. forduló

Az általános tantervű osztályok feladatai

1. Bizonyítsuk be, hogy minden $x \geq \frac{1}{2}$ valós számra

$$\sqrt{9x+7} < \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} < \sqrt{9x+9}.$$

2. A sík egy véges H ponthalmazának az a tulajdonsága, hogy bármely P, $R \in H$ pontpárhoz van egy $Q \in H$ pont, amelyre $PQR\sphericalangle$ hegyesszög. Bizonyítsuk be, hogy H valamely ponthármasa hegyesszögű háromszöget határoz meg!

3. Negyven gyufaszálat szétosztottunk húsz skatulyába, mindegyikben van gyufaszál, egyikben sincs huszonegy darab. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható néhány skatulya, amelyekben összesen húsz gyufaszál van!

A szakközépiskolások feladatai

1. Adott az ABC háromszög síkjában a háromszög oldalegyeneseire nem illeszkedő O pont. Húzzunk az O ponton át a háromszög oldalaival párhuzamos egyeneseket, ezek a háromszög másik két oldalegyenesét egy-egy pontban metszik. Az O pont és az egy-egy oldalegyenesen fekvő 2 metszéspont három háromszöget határoz meg. Fejezzük ki az ABC háromszög területét ezeknek a háromszögeknek a területével!

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $x \geq \frac{1}{2}$ valós számra

$$\sqrt{9x+7} < \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} < \sqrt{9x+9}.$$

3. Egy 4 egység élhosszúságú kockát akarunk szétvágni 64 darab 1 élhosszúságú kis kockára. Ezt megtehetjük egyszerűen 9 vágással, ha a szétvágással keletkező darabokat nem mozdítjuk el egymástól. Hány vágásra csökkenthető ez le, ha az egyes vágások után a kapott darabokat alkalmas módon átrendezhetjük?

A speciális matematika tantervű osztályok feladatai

1. Határozzuk meg a $\underbrace{33\ldots3}_{1984\text{ db}} \cdot \underbrace{66\ldots6}_{1984\text{ db}}$ szorzat számjegyeinek összegét!

2. Legyen $P_1, P_2, \ldots, P_5$ a sík öt pontja. Bizonyítsuk be, hogy a fellépő leghosszabb és legrövidebb távolság hányadosa legalább $2\sin 54°$!

3. Tavaly a teniszezők átlagosan tizennyolc különböző ellenféllel játszottak. Kiválasztható-e néhány versenyző úgy, hogy ha csak ezek egymás elleni mérkőzéseit tekintjük, akkor mindenki legalább tíz másikkal játszott?