Az első (iskolai) forduló feladatai

1. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{3x-11} \le 7-x.$$

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$4\cdot 3^x + \sqrt{4\cdot 3^{2x} - 4\cdot 3^{3x} + 3^{4x}} = 2.$$

3. Egy 15-ször 15 mezőt tartalmazó, négyzet alakú táblázatba beírjuk a természetes számokat 1-től 225-ig úgy, hogy az első sorba balról jobbra rendre az 1-től 15-ig terjedők kerüljenek, a második sorba ugyanígy a 16-tól 30-ig terjedők, és így tovább; végül az utolsóba a 211-től 225-ig terjedők.

Igazoljuk, hogy bármiképpen választunk ki a táblázatból egy 11-szer 11 mezőt tartalmazó, négyzet alakú összefüggő részt, az ebben található számok összege mindig osztható 121-gyel!

4. Az $ABCD$ négyzet belsejében olyan PAB egyenlő szárú háromszöget rajzolunk, amelyben $PAB\sphericalangle = PBA\sphericalangle = 15^\circ$.

Igazoljuk, hogy a PCD háromszög szabályos!

5. Adott a konvex $ABCD$ négyszög. (A csúcsokat pl. az óramutatóval ellentétes körüljárási irányban betűztük meg.)

Igazoljuk, hogy ha az ABC, BCD, CDA és DAB háromszögek kerülete egyenlő, akkor

$$AB^2 + BC^2 = CD^2 + DA^2.$$

(AB^2 jelöli az AB oldal mérőszámának négyzetét.)

6. Milyen határok közé esnek a síkbeli derékszögű koordináta-rendszer $(0;\,2)$ pontján átmenő egyenesek közül azoknak az iránytangensei, amelyeknek az

$$x \to \frac{1}{|[x]|},$$

függvény grafikonjával a $-4 < x < -2$ számközben két metszéspontjuk van?

7. Határozzuk meg a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyek egyenlő távolságra vannak az x tengely $[-2;\,2]$ és az y tengely $[1;\,3]$ szakaszától!

8. Egy dobozban végtelen sok cédula van. Minden cédulára felírtunk egy természetes számot. Tudjuk, hogy bármiképpen veszünk is ki a dobozból végtelen sok cédulát, mindig van köztük két olyan, hogy a rájuk írt számok különbsége legfeljebb egymillió.

Bizonyítsuk be. hogy van olyan szám, amely végtelen sok cédulán szerepel!

Második (döntő) forduló

A gimnáziumok speciális matematika tantervű III–IV . osztályos tanulói számára

1. Egy háromszög oldalainak hossza a, b, c, a háromszögbe írt kör sugarának hossza ϱ, az egyes oldalakhoz hozzáírt körök sugarainak hossza rendre ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c. Igazoljuk, hogy a háromszög akkor és csak akkor hegyesszögű, ha

$$\varrho^2 + \varrho_a^2 + \varrho_b^2 + \varrho_c^2 < a^2 + b^2 + c^2.$$

2. Adott a síkon nyolc pont úgy, hogy nincs közöttük négy egy egyenesen. Legfeljebb hány olyan egyenes van, amire az adott pontok közül három illeszkedik?

3. A végtelenhez tartó (a_n) sorozat elemei természetes számok. Bizonyítsuk be, hogy ha a

$$b_n = \frac{a_1\cdot a_2\cdot \ldots \cdot a_n}{2^{a_n}}$$

sorozat konvergens, akkor határértéke zérus!

Az alaptanterv szerint tanuló gimnáziumi III. és IV. osztályos tanulók feladatai

1. Határozzuk meg mindazokat az x valós számokat, amelyekre az alábbi három állítás közül kettő igaz, egy pedig hamis:

a) x egész szám,

b) $x^2 - 3x$ negatív egész szám,

c) $x + \dfrac{1}{x}$ pozitív egész szám.

2. Bizonyos számú, egységnyi élű kockából egy nagyobb (tömör) kockát raktunk össze, majd befestettük ennek a nagyobb kockának néhány oldallapját. Ezután a nagyobb kockát szétszedtük egységnyi élű kockákra és azt találtuk, hogy 45 darab egységnyi élű kockának egy oldallapja sincs befestve.

Hány oldallapját festettük be a nagyobb kockának?

3. Jelentsenek a, b és c olyan nem-negatív valós számokat, amelyeknek összege 1-gyel egyenlő!

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1-a}{1+a}+\frac{1-b}{1+b}+\frac{1-c}{1+c}\geq\frac{3}{2}.$$

Mely esetben érvényes itt az egyenlőség?

A nem speciális matematika tantervű III–IV. osztályos tanulók feladatai

1. Az $ABCDEF$ konvex hatszög AB, BC, CD, DE, EF, FA oldalainak felezőpontjai rendre P, Q, R, S, T, U. Bizonyítsuk be, hogy a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő PS, QT, RU szakaszok között akkor és csakis akkor van két merőleges, ha ezekből a szakaszokból derékszögű háromszög szerkeszthető.

2. Hányféleképpen fedhető le a 2×30-as sakktábla 1×2-es dominókkal? (A táblát rögzítettnek tekintjük.) (A 2×30-as sakktábla téglalap, amelynek oldalai 2, ill. 30 egyégnyiek; a lefedések számának pontos értékét kell megadni.)

3. Legyen p 4-nél nagyobb egész szám. Bizonyítsuk be, hogy p akkor és csakis akkor primszám, ha p bármely, négy pozitív egész összegére való felbontásában semelyik két tag szorzata sem egyenlő a másik két tag szorzatával.

Harmadik (rendkívüli döntő) forduló

A gimnáziumok speciális matematika tantervű III–IV. osztályos tanulói számára

1. Határozzuk meg az összes olyan a, b, c és A, B, C nemnegatív valós számot, amelyre teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$\begin{aligned}a+b+c&=1,\\A+B+C&=1,\\aA+bB+cC&=\frac{1}{3},\\aB+bC+cA&=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

2. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, P pedig a háromszög egy belső pontja. A PAB, PBC, PCA háromszögek magasságpontjait jelölje rendre R, S, T.

Bizonyítsuk be, hogy az ABC és RST háromszögek területe megegyezik!

3. Mutassuk meg, hogy annak a valós számokon értelmezett f függvények, amely tetszőleges x valós számra az

$$f(x)=\sin x+\sin\,(x\cdot\sqrt{2}),$$

értéket veszi fel, nincs legnagyobb értéke!