$$\begin{aligned} y^2 - zx &= a(x+y+z)^2, \\ x^2 - yz &= b(x+y+x)^2, \\ z^2 - xy &= c(x+y+z)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Keressük meg először az egyenletrendszer olyan megoldásait – ha vannak –, melyekre $x+y+z=0$. Ilyen feltétel mellett az egyenletrendszer a következőképpen alakul:

$$y^2 = xz; \qquad z^2 = xy; \qquad x^2 = yz; \qquad \text{valamint} \qquad x+y+z=0.$$

A feltételből $y=-x-z$, innen $y^2 = x^2 + 2xz + z^2 = xz$, azaz $x^2 + xz + z^2 = 0$, ami valós számokban csak úgy lehet, ha $x=z=0$, amiből $y=0$ is következik. Így $x+y+z=0$ mellett csak $x=y=z=0$ megoldás lehetséges, és ez valóban megoldása is az (1) egyenletrendszernek.

A továbbiakban feltesszük, hogy $x+y+z \neq 0$. Az (1) első egyenletéből vonjuk ki a másodikat, a másodikból a harmadikat, valamint a harmadikból az elsőt. Rendre a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} y^2 - z^2 + xy - xz &= (a-b)(x+y+z)^2, \\ z^2 - x^2 + yz - xy &= (b-c)(x+y+z)^2, \\ x^2 - y^2 + xz - yz &= (c-a)(x+y+z)^2. \end{aligned}$$

Kiemelések után és $x+y+z \neq 0$-val osztva:

$$\begin{aligned} y - z &= (a-b)(x+y+z), \\ z - x &= (b-c)(x+y+z), \\ x - y &= (c-a)(x+y+z). \end{aligned}$$

Válasszuk az $x+y+z$ értéket paraméternek és jelöljük $3s$-sel. Ennek segítségével fejezzük ki x, y, valamint z értékét:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3s, \\ y - z &= 3(a-b)s, \\ z - x &= 3(b-c)s, \\ x - y &= 3(c-a)s. \end{aligned} \tag{2}$$

Az első egyenlethez hozzáadva a negyediket és levonva a harmadikat, x értékét kapjuk. Hasonlóan nyerjük y és z értékét a megfelelő egyenletek hozzáadásával, illetve levonásával:

$$\begin{aligned} x &= (2c - a - b + 1)s, \\ y &= (2a - b - c + 1)s, \\ z &= (2b - c - a + 1)s. \end{aligned} \tag{3}$$

Tehát ha az (1) egyenletrendszernek van az $x=y=z=0$ megoldáson kívül más megoldása, akkor azt (3) adja meg. Nézzük meg, hogy (3) mikor lesz megoldása az eredeti egyenletrendszernek (feltétel szerint $s \neq 0$). Például az első egyenlet bal oldalába helyettesítve, a kapott érték

$$\left[(3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 3ab - 3bc - 3ca - 3a - 3b - 3c) + 9a\right] \cdot s^2,$$

míg a jobb oldal $9as^2$. A két oldal ($s \neq 0$ miatt) csak akkor lesz egyenlő, ha

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) - (a + b + c) = 0. \tag{4}$$

Könnyen látható, hogy a (4) feltétel mellett a többi egyenletet is kielégíti (3) Amennyiben a (4) feltétel teljesül, akkor az összes megoldást is megadja a (3) képlet, ugyanis az $x=y=z=0$ megoldást éppen az $s=0$ helyettesítéskor kapjuk.

Összefoglalva, ha (4) nem teljesül, akkor az egyenletrendszer egyetlen megoldása $x=y=z=0$, ha viszont (4) igaz, úgy az egyenletrendszer összes megoldását (3) szolgáltatja, ahol s tetszőleges valós számot jelöl.