

1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha az x, y, z racionális számokra

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0$$

teljesül, akkor $x = y = z = 0$.

I. megoldás. Az $x = y = z = 0$ értékhármass nyilvánvalóan megoldása az egyenletnek. Ha van ettől különböző megoldás, ahhoz található olyan, 0-tól különböző u racionális szám, amelyikre

$$X = ux, \quad Y = uy \quad \text{és} \quad Z = uz$$

egész szám, és 0-tól különböző racionális számhoz 0-tól különböző egész tartozik. (Egy olyan u , amelyiknek a számlálója osztható a racionális számok nevezőivel, nevezője pedig közös osztója a számlálónak, megfelel). Egyenletünk mindkét oldalát u^3 -nal szorozva kapjuk, hogy

$$(1) \quad X^3 + 3Y^3 + 9Z^3 - 9XYZ = 0$$

is teljesül. Elég tehát azt megmutatni, hogy (1)-nek nincs más *egész* megoldása, mint $X = Y = Z = 0$.

Válasszunk egy olyan egész számokból álló megoldást, amelyikre $|X| + |Y| + |Z|$ a lehető legkisebb. Ilyen van, mert egy megoldáshoz összesen csak véges sok olyan, egész számokból álló hármas van, amelyikre az abszolút értékek összege nem nagyobb, mint az adott megoldásban. Ezek közül tartsuk meg azokat, amelyeket X, Y , ill. Z helyébe helyettesítve (1) teljesül. Ezek közül kiválasztható egy olyan hármas, amelyikben az abszolút értékek összege minimális.

Ha ebben a megoldásban $X = 0$, akkor

$$Y^3 + 3Z^3 = 0$$

is fennáll. Ha itt $Z = 0$, akkor Y is 0. Nem lehet azonban $Z \neq 0$, mert akkor a

$$3Z^3 = -Y^3$$

bal oldalának törzsszámhatványokra történő felbontásában 3 kitevője egy 3-mal nem osztható szám lenne, a jobb oldal felbontásában viszont 3-mal osztható szám. A számelmélet alaptétele szerint azonban egy egész szám törzsszámhatványokra történő felbontásában minden törzsszám kitevője egyértelműen meg van határozva. Megállapításunk így is fogalmazható: 3 nem köbe racionális számnak, vagy $\sqrt[3]{3}$ irracionális. Ha tehát $X = 0$, akkor Y és Z is 0.

Ha $X \neq 0$, akkor

$$X^3 = 3(3XYZ - Y^3 - 3Z^3),$$

tehát X^3 osztható 3-mal. De 3-mal nem osztható számnak a köbe sem osztható 3-mal, tehát X -nek is oszthatónak kell lennie 3-mal. $X = 3X_1$. Ezt (1)-be beírva és 3-mal osztva, azt kapjuk, hogy

$$Y^3 + 3Z^3 + 9X_1^3 - 9YZX_1 = 0,$$

azaz $Y, Z, X_1 = X/3$ is megoldása (1)-nek. Erre azonban

$$|Y| + |Z| + |X/3| < |X| + |Y| + |Z|,$$

mert $X \neq 0$. Ez viszont nem lehetséges, mert olyan megoldásból indultunk ki, amelyikben az abszolút értékek összege minimális volt. Nem lehet tehát olyan egész számokból álló megoldás, amelyikben $X \neq 0$. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Többen abból az észrevételből indultak ki, hogy

$$3xyz = x \cdot (\sqrt[3]{3}y) (\sqrt[3]{9}z) = \sqrt[3]{x^3(3y^3)(9z^3)},$$

tehát az első három tag mértani közepe. Így ha x, y és z pozitív, a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből következtettek a feladat állításának helyességére. Arra az esetre azonban, ha x, y és z közt vannak különböző előjelűek, ez a gondolat nem vihető tovább.

2. Az I. megoldáshoz hasonló utat követő versenyzők vagy azt bizonyították, hogy X -nek, Y -nak és Z -nek 3 akár milyen magas hatványával oszthatónak kell lennie, és ez 0-tól különböző egész számra nem lehetséges, vagy belátták, hogy egy, az $X = Y = Z = 0$ -tól különböző megoldásról feltehető, hogy relatív prím számokból áll, viszont másrésztől mindegyiknek oszthatónak kellene lennie 3-mal, ilyen megoldás tehát nem létezik.

Csak kevesen hivatkoztak a törzsszámhatványokra történő felbontás egyértelműségére, de ennek hiányát a bizottság nem tekintette hibának.

3. A bizonyítás egy érdekes befejezése volt a következő: Ha 3 kitevője X, Y és Z felbontásában a, b , ill. c , akkor (1) egymás utáni tagjaiban 3 kitevője

$$3a, \quad 3b+1, \quad 3c+2, \quad a+b+c+2.$$

Ezek közül az első három különböző, mert 3-mal osztva különböző maradékot adnak. Jelöljük közülük a legkisebbet m -mel. Ennek a 3-szorosa tehát kisebb a három kitevő összegénél:

$$3m < 3a + 3b + 3c + 3 = 3(a + b + c + 1).$$

Így

$$m < a + b + c + 1 < a + b + c + 2,$$

vagyis m -nél nagyobb a 3 kitevője a negyedik tagban is. Ha tehát (1) mindkét oldalát osztjuk 3^m -nel, akkor a bal oldalon egy tag lesz, amelyik nem osztható 3-mal, tehát a bal oldal nem osztható vele, viszont a jobb oldalon továbbra is 0 áll, ami osztható 3-mal. Ezzel ellentmondásra jutottunk.

Ez a meg gondolás felhívja a figyelmet arra, hogy az állítás az

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 3xyz = 0$$

egyenletre is igaz marad. A közölt megoldás is változtatás nélkül alkalmazható erre az egyenletre is. Nem volna viszont alkalmazható a következő megoldás, amire szintén többen rátaláltak.

II. megoldás. Ismeretes és könnyen igazolható a következő azonosság-pár:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = \\ &= (a + b + c)\frac{1}{2}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2). \end{aligned}$$

Ide a , b , c helyébe x , $\sqrt[3]{3}y$, $\sqrt[3]{9}z$ értékeket írva a feladatban szereplő egyenlet bal oldala így alakítható át:

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = (x + \sqrt[3]{3}y + \sqrt[3]{9}z)\frac{1}{2}((x - \sqrt[3]{3}y)^2 + (\sqrt[3]{3}y - \sqrt[3]{9}z)^2 + (\sqrt[3]{9}z - x)^2).$$

Az utolsó tényező csak úgy lehet 0, ha benne mind a 3 tag 0, tehát többek közt

$$x - \sqrt[3]{3}y = 0.$$

Ebből azonban $y = x = 0$ következik, miután $\sqrt[3]{3}$ irracionális. Ekkor pedig z is 0.

Marad még az a lehetőség, hogy

$$(1) \quad x + \sqrt[3]{3}y + \sqrt[3]{9}z = 0.$$

Szorozzunk $\sqrt[3]{3}$ -mal:

$$(2) \quad 3z + \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9}y = 0.$$

A két egyenletből küszöböljük ki a $\sqrt[3]{9}$ tartalmazó tagokat, az első egyenlet bal oldalának y -szorosából a másodikénak z -szeresét levonva:

$$(xy - 3z^2) + \sqrt[3]{3}(y^2 - zx) = 0.$$

Miután $\sqrt[3]{3}$ irracionális, ez racionális x , y , z -vel csak úgy teljesülhet, ha

$$xy - 3z^2 = 0 \quad \text{és} \quad y^2 - zx = 0.$$

Az előbbi egyenletet z -vel, az utóbbit y -nal szorozva és átrendezve innen azt kapjuk, hogy

$$3z^3 = xyz = y^3.$$

Ebből ismét $y = z = x = 0$ következik. A feladatban szereplő egyenlet tehát csak erre az egy racionális számhármásra teljesül.

Megjegyzés. Ugyanígy látható, hogy ha a olyan racionális szám, amelyik nem köbe racionális számnak, akkor az

$$x^3 + ay^3 + a^2z^3 - 3axyz = 0$$

egyenlet egyetlen racionális számokból álló megoldása $x = y = z = 0$.

2. feladat. Az $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + 1$ polinom $a_1, \dots, a_{n-1}$ együtthatói nem negatívak és az $f(x) = 0$ egyenletnek n valós gyöke van. Bizonyítsuk be, hogy $f(2) \geq 3^n$.

I. megoldás. A polinomnak valós 0-helye csak negatív szám lehet, mert nem negatív x helyen egy tag sem negatív és az állandó tag 1, és így

$$f(x) \geq 1 \quad \text{ha} \quad x \geq 0.$$

Feltétel szerint n valós gyök van, jelöljük ezeket $-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n$ -nel. Itt tehát az α_i -k pozitív számok. Az egyenlet gyökei és együtthatói közti összefüggések szerint $j = 1, 2, \dots, n-1$ -re

$$\begin{aligned} a_j = & (-1)^j ((-\alpha_1)(-\alpha_2) \dots (-\alpha_j) + \dots + (-\alpha_{m_1})(-\alpha_{m_2}) \dots (\alpha_{m_j}) + \dots + \\ & + (-\alpha_{n-j+1})(-\alpha_{n-j+2}) \dots (-\alpha_n)) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j + \dots + \\ & + \alpha_{m_1} \alpha_{m_2} \dots \alpha_{m_j} + \dots + \alpha_{n-j+1} \alpha_{n-j+2} \dots \alpha_n, \end{aligned}$$

végül

$$(1) \quad (-1)^n (-\alpha_1)(-\alpha_2) \dots (-\alpha_n) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = 1.$$

Az a_j -t előállító összeg mindazokból a tagokból áll, amelyek úgy keletkeznek, hogy kiválasztunk a gyökök közül j darabot és azokat összeszorozzuk. Ezek száma $\binom{n}{j}$.

Alkalmazzuk az összegre a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget. A tagok szorzatában minden α_i , szerepelni fog, és pedig ugyanazon az A hatványon (ahányféleképpen a maradék $n-1$ gyök közül $j-1$ -et kiválaszthatunk α_i mellé, azaz $A = \binom{n-1}{j-1}$), tehát ez a szorzat, felhasználva (1)-et

$$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)^A = 1.$$

Így a tagok mértani közepe is 1, tehát az említett egyenlőtlenség szerint

$$\frac{a_j}{\binom{n}{j}} \geq 1 \quad \text{vagyis} \quad a_j \geq \binom{n}{j} \quad (1 \leq j \leq n-1).$$

Ezt minden együtthatóra alkalmazva, azt kapjuk, hogy

$$f(2) \geq 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} 2 + 1 = (2+1)^n = 3^n,$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés. A megoldás azt is adja, hogy ha c nem negatív szám, akkor

$$f(c) \geq c^n + \binom{n}{1} c^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} c + 1 = (c+1)^n.$$

II. megoldás. Ismeretes, hogy ha egy

$$g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n$$

polinomnak gyökei a $c_1, \dots, c_k$ számok, akkor ilyen alakban írható:

$$g(x) = (x - c_1) \dots (x - c_k) g_1(x),$$

ahol g_1 egy $(n-k)$ -adfokú polinom, amelyikben a legmagasabb fokú tag együtthatója b_0 . Az előző megoldás jelöléseit használva esetünkben

$$f(x) = (x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \dots (x + \alpha_n).$$

Ide x helyett 2-t helyettesítve alkalmazzuk minden tényezőre a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget a következő alakban:

$$2 + \alpha_m = (1 + 1 + \alpha_m) = 3 \cdot \frac{1 + 1 + \alpha_m}{3} \geq 3 \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot \alpha_m} = 3 \sqrt[3]{\alpha_m}.$$

Ezt $m = 1, 2, \dots, n$ -re összeszorozva és figyelembe véve (1)-et, azt kapjuk, hogy

$$f(2) \geq 3^n \sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = 3^n.$$

Megjegyzés. Ez az eljárás az előző megoldáshoz fűzött megjegyzés általánosítását közvetlenül csak pozitív egész c -re adja. Érvényes azonban a felhasznált egyenlőtlenség következő általánosítása, ún. súlyozott alakja: Ha p és q pozitív számok (súlyok), és b_1, b_2 pozitív számok, akkor

$$(2) \quad \frac{pb_1 + qb_2}{p+q} \geq (b_1^p b_2^q)^{\frac{1}{p+q}}$$

és az egyenlőtlenség értelemszerű megfelelője 2-nél több számra. Ezt $p = c$, $q = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = \alpha_m$ választással alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$c + \alpha_m = (c + 1) \frac{c \cdot 1 + 1 \cdot \alpha_m}{c + 1} \geq (c + 1) (1^c \cdot \alpha_m^1) \frac{1}{c + 1} = (c + 1) (\alpha_m) \frac{1}{c + 1}$$

és így, (1)-et is felhasználva

$$f(c) \geq (c + 1)^n (\alpha_1 \cdot \alpha_2 \dots \alpha_n) \frac{1}{c + 1} = (c + 1)^n.$$

A (2) alatti egyenlőtlenség – és általánosítása is – racionális súlyok esetén egyszerűen visszavezethető a súlyok nélküli egyenlőtlenségre; ha pedig a súlyok közt van irracionális szám is, akkor a bizonyítás úgy történik, hogy az irracionális súlyokat megközelítjük racionális számokkal, és vizsgáljuk, mi történik, ha a megközelítést minden határon túl finomítjuk.

III. megoldás. Általánosan azt bizonyítjuk, hogy tetszés szerinti pozitív c -re

$$f(c) \geq (c + 1)^n.$$

Ismét a gyöktényezők szorzatára bontott alakból adódó

$$f(c) = (c + \alpha_1)(c + \alpha_2) \dots (c + \alpha_n)$$

szorzatot vizsgáljuk. Ha itt az α_i -k mind egyenlők, akkor (1) miatt mindegyik értéke 1 és

$$f(c) = (c + 1)^n.$$

Ha az α_i -k közt vannak különbözők, akkor van 1-nél kisebb is, nagyobb is. A számok sorrendjét megváltoztatva, ha kell, feltehetjük, hogy $\alpha_{n-1} < 1 < \alpha_n$. Hasonlítsuk össze ekkor $f(c)$ -t az $\alpha_m^* = \alpha_m$, ha $1 \leq m \leq n-2$, $\alpha_{n-1}^* = \alpha_{n-1}\alpha_n$, $\alpha_n^* = 1$ szám n -eshez tartozó

$$f^*(c) = (c + \alpha_1^*)(c + \alpha_2^*) \dots (c + \alpha_n^*) = (c + \alpha_1) \dots (c + \alpha_{n-2})(c + \alpha_{n-1}\alpha_n)(c + 1)$$

szorzattal. Erre is teljesül, hogy

$$\alpha_1^* \alpha_2^* \dots \alpha_n^* = 1;$$

továbbá

$$f(c) - f^*(c) = (c + \alpha_1) \dots (c + \alpha_{n-2}) ((c + \alpha_{n-1})(c + \alpha_n) - (c + \alpha_{n-1}\alpha_n)(c + 1))$$

Az utolsó tényezőt így alakíthatjuk át:

$$\begin{aligned} (c + \alpha_{n-1})(c + \alpha_n) - (c + \alpha_{n-1}\alpha_n)(c + 1) &= c(\alpha_{n-1} + \alpha_n - 1 - \alpha_{n-1}\alpha_n) = \\ &= c(1 - \alpha_{n-1})(\alpha_n - 1). \end{aligned}$$

Itt feltétel szerint mind a 3 tényező pozitív és pozitívak az $f(c) - f^*(c)$ kifejezésében szereplő további tényezők is, tehát

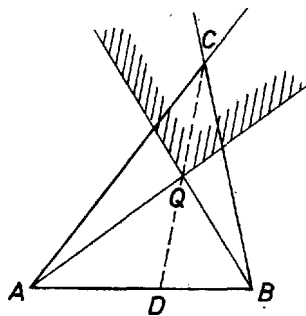
$$f(c) > f^*(c).$$

Ha az α_m^* számok nem mind egyenlők, az eljárást ismételhetjük, mert a szorzat közben mindig 1 marad. Legkésőbb $n - 1$ lépés után minden $\alpha = 1$ lesz. Mivel közben a fellépő f értékek növekednek, azt kapjuk, hogy

$$f(c) > (c + 1)^n.$$

3. feladat. Adott a síkon $n + 1$ pont, $P_1, P_2, \dots, P_n$ és Q , amelyek közül semelyik három nincs egy egyenesen. Tudjuk, hogy bármelyik két különböző P_i, P_j ponthoz található olyan P_k pont, hogy Q a $P_i P_j P_k$ háromszög belsejében van. Mutassuk meg, hogy n páratlan szám.

I. megoldás. A megoldáshoz a feltételt átfogalmazzuk. Megmutatjuk a következőt: Ha A, B és Q nem egy egyenesen levő pontok, akkor síkjuknak azokra és csak azokra a C pontjaira tartalmazza az ABC háromszög belsejében a Q pontot, amelyek az AQB konvex szög csúcsszög-tartományának belsejében vannak (1. ábra).



1. ábra

Valóban, ha Q a háromszög belsejében van, akkor C az AQ egyenesnek a B -t nem tartalmazó partján van, a BQ egyenesnek pedig az A -t nem tartalmazó partján. Így C a két félsík közös részében, tehát az állításban szereplő szögtartományban van. A konvex szögtartományról van szó, tehát arról, amelyik bármely két pontjával azok összekötő szakaszát is tartalmazza, miután a félsík konvex tartomány és konvex tartományok közös része is konvex.

Fordítva, ha C a mondott szögtartományban van, akkor a CQ egyenes Q -n túli meghosszabbítása metszi az AB szakaszt egy belső D pontjában. A CD szakasz az ABC háromszögben van, tehát annak Q belső pontja a háromszög belső pontja.

A feladatra térve a P_1Q egyenes egyik, mondjuk jobb partján levő pontok számát (P_1 -et nem számítva) jelöljük r -rel, a bal parton levőket s -sel. A jelölést, ha kell, változtassuk meg úgy, hogy a jobb parton a $P_2, \dots, P_{r+1}$ pontok legyenek, mégpedig úgy, hogy

$$P_1QP_2 \triangleleft P_1QP_3 \triangleleft \dots \triangleleft P_1QP_{r+1} \triangleleft 180^\circ$$

teljesüljön.

A P_iQ és $P_{i+1}Q$ félegyenes Q -n túli félegyenesei közti szögtartományok a bal parton vannak és a különböző i -khez tartozóknak nincs közös pontjuk. Minden ilyen tartományban van legalább egy a bal parti pontok közül, mert a P_i, P_{i+1} -hez megfelelő P_k pontoknak segédteételünk szerint itt kell lenniük. A szögtartományok száma r , így

$$r \leq s.$$

A bal és jobb part szerepét felcserélve ugyanígy azt nyerjük, hogy

$$s \leq r.$$

Így az összes P_i pontok száma:

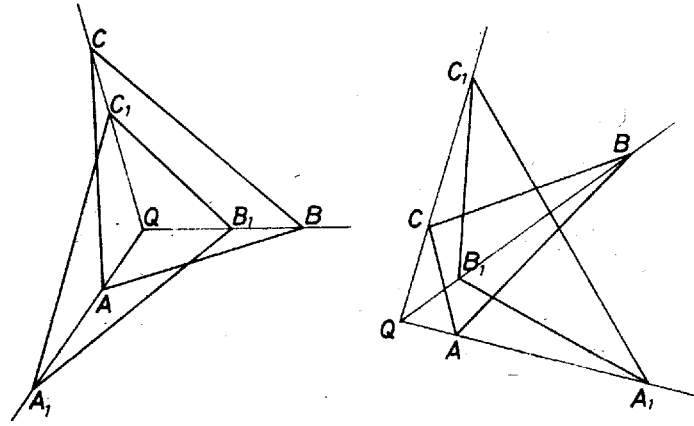
$$n = r + s + 1 = 2r + 1,$$

tehát páratlan szám, és ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzések. 1. A versenyzők túlnyomó része a megoldásban szereplő lemmát sok más, általában nem ilyen ügyes módon használta fel.

a) Sokan egy egyenest forgattak a Q pont körül és annak két félegyenesét pirosra, ill. zöldre festettnek gondolva megállapították, hogy forgatás közben felváltva egyszer a piros, legközelebb a zöld félegyenes halad át egy-egy P_i ponton. 180° -os elforgatás után ér vissza az egyenes először egy már érintett P_i ponthoz, de ezen most az egyenes másik félegyenesese halad át, mint a kiindulásnál, ezért ezzel a másodszor érintett ponttal együtt összesen páros számú ponton halad át az egyenes, másrészt $n + 1$ -en, tehát n páratlan.

b) Mások azt vették észre, hogy a feladat feltételei nem változnak, ha a P_i pontokat a Q -ból induló, rajtuk átmenő félegyenesen elmozdítjuk, hiszen ha A és A_1 , B és B_1 , C és C_1 egy-egy Q -ból induló félegyenesen van, akkor az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszöget nézve, vagy mindkettő belsejében tartalmazza Q -t, vagy egyik sem (2. ábra). Ennek alapján egy Q középpontú körre helyezték át a P_i pontokat. Ha a kör P_i -vel átellenes pontját R_i -vel jelöljük, akkor megállapították, hogy a kör mentén haladva felváltva következik egy P és egy R pont. A P pontok száma helyett az átmérőket számolták össze egy félkörre eső végpontjaik szerint. Ha a P_1 ponttal kezdjük a megszámlálást, akkor egy P ponttal is fejezzük be, mert R_1 az első pont, amit már nem számolunk. Ebből ismét következik n páratlan volta.



2. ábra

2. A versenyzők a segédítélt általában szemlélet alapján mondták ki. Ezt a bizottság nem tekintette hibának.

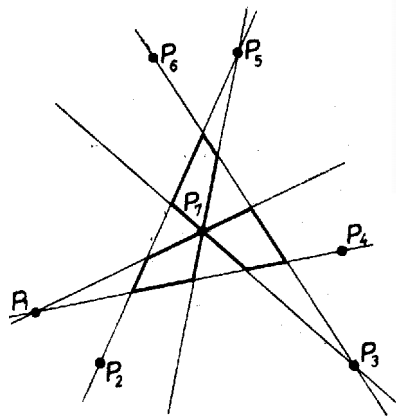
3. Többen megjegyezték, hogy a bizonyításban csak annyit használtunk ki, hogy egy P_i , egy P_j pont és Q nincs egy egyenesen, elég lett volna tehát ennyit feltételezni. Azt azonban már nem vették észre, hogy ezt meg nem kell külön feltenni, hiszen ha valamilyen i -re és j -re ez volna a helyzet, akkor semmilyen k -ra nem tartalmazhatná a $P_iP_jP_k$ háromszög belsejében a Q -t, tehát nem teljesülhetne a feladat másik feltétele.

4. Sokan megjegyezték, hogy minden páratlan n -re van a feltételeket kielégítő pontrendszer, pl. egy szabályos n -szög csúcsait választjuk P_i pontoknak és a középpontját Q -nak.

Többen felvetették azt a kérdést, hogy ha megadunk tetszés szerint páratlan számú pontot a síkban, van-e hozzájuk olyan Q pont, amivel teljesülnek a feladat feltételei. A közölt megoldás felhasználásával megmutatjuk, hogy a kérdésre tagadó a válasz.

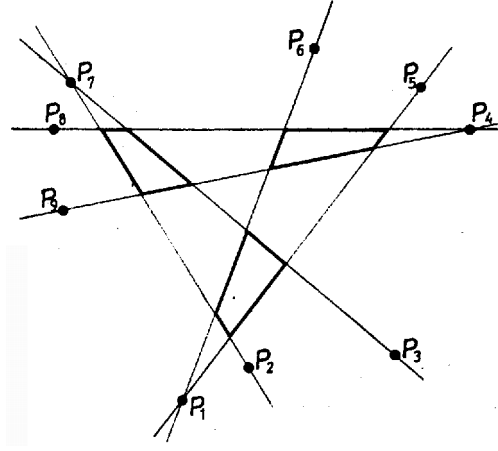
A bizonyítás azt adta, hogy a P_1Q egyenes egyik és másik partján ugyanannyi P_i pontnak kell lennie. Itt P_1 helyett bármelyik P_i pontot vehettük volna. Azt bizonyítottuk tehát, hogy *ha a feladat feltételei teljesülnek, akkor mindegyik P_iQ egyenes egyik és másik partján ugyanannyi P_j pont van.*

Ha most 3 nem egy egyenesen levő pont van adva, akkor az általuk meghatározott háromszög minden belső pontja választható Q -nak. Nem nehéz belátni azt sem, hogy ha 5 pont van a síkban, azokhoz is található megfelelő Q pont. Ha azonban 7 pontot pl. a 3. ábrán látható módon adunk meg, akkor nem található hozzájuk megfelelő Q pont.



3. ábra

Valóban, Q a feladat feltételeinek fent megfogalmazott következménye szerint olyan kell hogy legyen, hogy pl. a QP_1 egyenes mindkét partján 3-3 P_i pont legyen. Ez csak a $P_4P_1P_7$ szögtartomány belsejében levő pontokra teljesül. Hasonlóan benne kell lennie Q -nak a $P_6P_3P_7$ és a $P_2P_5P_7$ szögtartomány belsejében is. A 3 szögtartománynak azonban egyetlen közös pontja P_7 , és az is határpontja mindegyiknek, tehát nincs megfelelő Q pont.



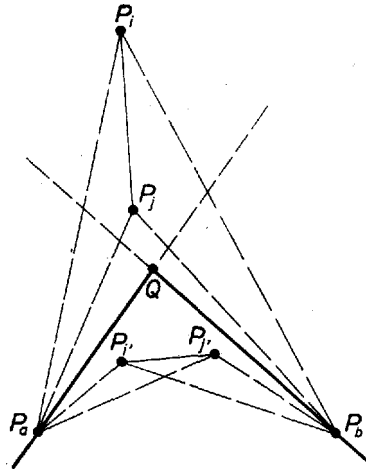
4. ábra

A 4. ábra 9 pontja közt 3 olyan szögtartományt jelöltünk meg, amelyeknek még közös határpontjuk sincs, viszont ha volna alkalmas Q pont, annak mindegyik belsejében kellene lennie.

A következő megoldás a pontok megszámlálása helyett visszavezeti a problémát egy 2-vel kevesebb pontból álló rendszer esetére.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha egy $P_1, P_2, \dots, P_n, Q$ pontrendszerre teljesülnek a feladat feltételei, akkor minden P_a ponthoz található olyan P_b pont, hogy az e két pont elhagyása után visszamaradó pontrendszerre is teljesülnek. Ebből már következik, hogy n csak páratlan lehet, hiszen ha $n > 3$, n pont közül pontpárok elhagyásával eljuthatunk páratlan számú pont esetén 3, páros számú n esetén 2 pontból álló rendszerhez, amelyre szintén teljesülnek a feladat feltételei. De 2 pont, P_1 és P_2 esetén nem teljesülhetnek, hiszen egyáltalán nem választható hozzájuk egy harmadik P_h pont, így semmilyen páros n -re sem teljesülhetnek a feltételek. n tehát csak páratlan lehet.

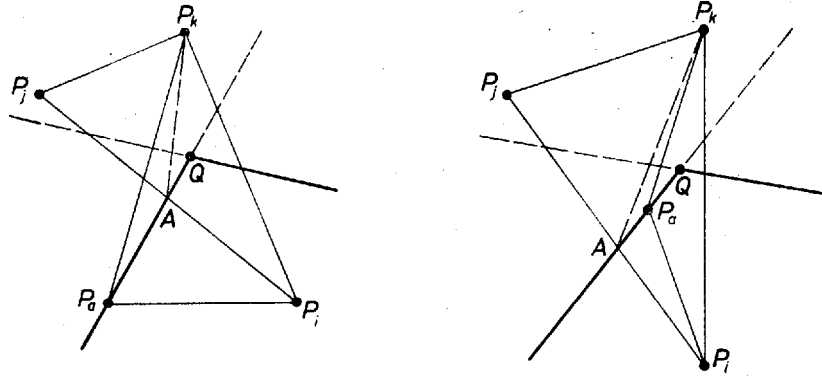
Teljesüljenek a $P_1, P_2, \dots, P_n, Q$ pontokra a feladat feltételei. Kiválasztva tetszés szerint egy P_a pontot, forgassuk a P_aQ egyenest Q körül valamelyik irányban, míg egy újabb P_b ponthoz nem ér. Nevezzük a P_i pontokból P_a és P_b elhagyásával visszamaradó pontrendszert $\mathcal{D}$ -nek. Mivel P_b volt az első pont, amibe a forgatott egyenes P_a elhagyása után beleütközött, a P_aQ és P_bQ egyenesek közti 4 szögtartomány közül egy csúcsszögeket alkotó párban nincs további P_i pont. Az I. megoldásban bizonyított segédétel szerint a P_a, P_b -hez megfelelő P_k pontok a P_aQ és P_bQ szakaszok Q -n túli meghosszabbításai közti konvex szögtartomány belsejében vannak. Így ez és a P_aQP_b szögtartomány tartalmazza $\mathcal{D}$ -t.



5. ábra

Legyen P és P_j $\mathcal{D}$ -nek két pontja. Ha ugyanabban a szögtartományban vannak, akkor sem a $P_iP_jP_a$, sem a $P_iP_jP_b$ háromszög nem tartalmazza Q -t (5. ábra), tehát a P_i, P_j -hez megfelelő P_k pontok $\mathcal{D}$ -hez tartoznak.

Ha P_i a P_aQP_b szögtartományban van, P_j a csúcsszög-tartományban, akkor feltehetjük, hogy a P_iP_j szakasz a QP_a félegyenest metszi egy A pontban. Legyen P_k olyan pont, amelyre $P_iP_aP_k$ tartalmazza Q -t (6. ábra).



6. ábra

Mivel A a Q -ból induló QP_a félegyenesen van, a P_iAP_k háromszög is tartalmazza Q -t. Az utóbbi háromszög része a $P_iP_jP_k$ háromszögnek, így ez is tartalmazza Q -t, tehát P_k a P_i, P_j pontpárhoz is megfelelő harmadik pont. P_k a $\mathcal{D}$ pontrendszer pontja, hiszen mint P_i és P_a -hoz megfelelő pont, az I. megoldás segédtetele szerint a P_aQP_i szögtartomány csúcsszög-tartományában van, és így a P_aQP_b szögtartományon kívül; P_k tehát különbözik P_a -tól és P_b -től. Ezzel beláttuk a megoldás elején megfogalmazott állítást és így a feladat állítását is.