Feltehetően mindenki egyetért azzal, hogy a súlypont, a magasságpont, a háromszög köré és a háromszögbe írt kör középpontja egyaránt nevezetes pontja a háromszögnek. Legutóbbi két számunkban Surányi László újabb nevezetes pontokkal ismertette meg olvasóinkat. [1] Felmerül a kérdés: tulajdonképpen hány nevezetes pontja is van egy háromszögnek? Az alábbiakban egy paradox állítást bizonyítunk be, ami rámutat arra, hogy a „nevezetes" és a „nem nevezetes" pontok közti határvonalat mennyire nehéz meghúzni.

Nem lehet a háromszög összes belső pontja nevezetes, hiszen akkor a „nevezetes" megkülönböztető jelző nem különböztetne meg egyetlen pontot sem a többitől. Az sem lehet, hogy csak egyetlen nemnevezetes pont legyen, hiszen ekkor ez a pont is nevezetes volna: nevezetesen arról, hogy ő az egyetlen nem nevezetes pont. Hasonlóan több, sőt nagyon sok nem nevezetes pontnak is kell lennie.

Másik oldalról az alábbi két, nevezetes pontokról szóló állítást feltehetően mindenki elfogadja:

(i) Egy háromszög csúcspontjai nevezetes pontok.

(ii) Ha az ABC háromszögben N_1, N_2 és N_3 nevezetes pontok, akkor az $N_1N_2N_3$ háromszög súlypontja is nevezetes.

Azt persze nem állítjuk, hogy csak ezek volnának a nevezetes pontok, de hogy ezek nevezetesek, az biztos.

(i) és (ii) meglehetősen egyszerűnek, sőt igaznak látszó feltételek. Az ártatlan külső alatt azonban ott lapul az alábbi meglepő következmény:

Tétel. *Akárhogyan is veszünk fel az ABC háromszög belsejében egy kört, lesz a háromszögnek olyan nevezetes pontja, ami a kör belsejébe esik.*

Más szavakkal: nincs egyetlen „tisztás" sem a nevezetes pontok erdejében, a nevezetes pontok a háromszögben *sűrűn* helyezekednek el.

A bizonyítás egyszerűsítése érdekében bevezetünk egy új elnevezést. Egy P pontról azt mondjuk, hogy az *mindegegy*, [2] ha tetszőleges P középpontú körben található P-től különböző nevezetes pontja a háromszögnek. Könnyű belátni, hogy a bizonyítandó állítás ekvivalens a következővel:

(*) *Az ABC háromszög minden belső és határpontja mindegegy.*

A tétel bizonyítását egy önmagában is érdekes segédtétel, egy *lemma* [3] kimondásával és igazolásával kezdjük.

Lemma. Tegyük fel, hogy az ABC és az $A'B'C'$ (esetleg elfajult) háromszögek olyanok, hogy az AA', BB', valamint CC' távolságok mindegyike kisebb ε-nál. Ekkor az ABC háromszög S súlypontjának és az $A'B'C'$ háromszög S' súlypontjának a távolsága is kisebb ε-nál.

Bizonyítás. Mutassanak a közös kezdőpontból kiinduló $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok az ABC háromszög csúcsaiba, az $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ vektorok pedig az $A'B'C'$ csúcsaiba. Ekkor S-be az $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$, S'-be pedig az $\frac{1}{3}(\mathbf{a}'+\mathbf{b}'+\mathbf{c}')$ vektor mutat.

Az S és S' közötti távolság e két vektor különbségével, vagyis az

$$\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})-\frac{1}{3}(\mathbf{a}'+\mathbf{b}'+\mathbf{c}')=\frac{1}{3}[(\mathbf{a}-\mathbf{a}')+(\mathbf{b}-\mathbf{b}')+(\mathbf{c}-\mathbf{c}')],$$

vektor hosszával egyezik meg. Az $\mathbf{a}-\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}-\mathbf{b}'$, valamint a $\mathbf{c}-\mathbf{c}'$ vektor hossza az A és A', a B és B', illetve C és C' közti távolsággal egyenlő, tehát mindhárom vektor rövidebb ε-nál. Összegük, vagyis $(\mathbf{a}-\mathbf{a}')+(\mathbf{b}-\mathbf{b}')+(\mathbf{c}-\mathbf{c}')$, a háromszög-egyenlőtlenség miatt rövidebb 3ε-nál, tehát az összeg harmada, vagyis az S'-ből S-be mutató vektor hossza is rövidebb ε-nál. Ezt akartuk bizonyítani.

Most rátérünk a tétel, pontosabban a (*) alatti állítás bizonyítására.

1. Elsőként azt igazoljuk, hogy a háromszög oldalfelező pontjai „mindegegyek". Legyen tehát F például az AB oldal felező pontja, és definiáljuk az S, S_1, ... pontokat a következőképpen. S az ABC háromszög súlypontja, S_1 az ABS súlypontja, S_2 az ABS_1 súlypontja és így tovább (1. ábra).

---

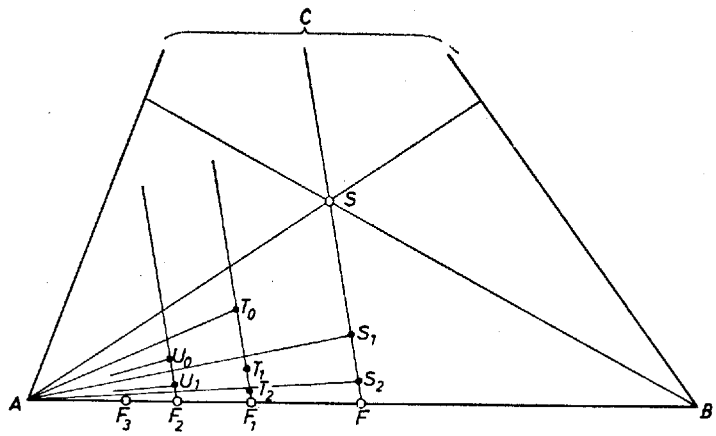
[1] Surányi László: A háromszög kevésbé ismert nevezetes pontjairól (KÖMAL 34. évfolyam 7 – 8 – 9. szám).

[2] A „mindegegy" jelző Karinthy Frigyes egyik halandzsaverséből való. A szonett – sajnos csak töredékes formában – Karinthy *Mint vélgaban* című glosszájában olvasható (a glossza pedig *A Tükör és a maszk* antológiában):

Fájdala

A pő, ha engemély kimár –
De mindegegy ha vildagár...
... Mert engemély minder bagul,
Mint vélgaban a bégahúr!

[3] A *Természettudományi Lexikon* szerint „ **lemma** görögül 'feltevés' segédtétel. A régebbi dialektikában (különösen Arisztotelésznél) bármilyen kevésbé fontos bizonyított vagy akár bizonyítás nélkül elfogadott tétel, amelyből valamely nála fontosabb állítást levezetünk. Archimedesznél hol feltevés, hol meg segédtétel jelentésű. Később a szó utóbbi jelentése vált általánossá." A *Matematikai Kislexikon* pedig a következőket írja: „valamely tétel bizonyítása során gyakran célszerű bizonyos olyan részállításokat megfogalmazni, melyek önmagukban is érdekesek, vagy pedig a bizonyítás során többször felhasználásra kerülnek. Ezeket az ún. segédtételeket lemmának is szokták nevezni."



1. ábra

Világos, hogy ezek mind nevezetes pontok, mind rajta vannak az ABC háromszög CF súlyvonalán, valamint hogy $FS = FC/3$, $FS_1 = FS/3 = FC/9$, $FS_2 = FS_1/3 = FC/27$, és általában

$$FS_n = \frac{FC}{3^{n+1}}.$$

Mivel n növekedtével 3^{n+1} minden határon túl nő, azért akárhogyan is veszünk fel egy F középpontú kört, abba az S_n pontok véges sok kivételével mind beleesnek. Így F valóban mindegy.

2. Másodszorra azt mutatjuk meg, hogy a háromszög mindhárom csúcsa mindegy. Ez nem következik abból, hogy a csúcsok nevezetes pontok, hiszen például egy A körüli tetszőleges körben A-tól különböző nevezetes pontot kell találnunk. Célunkat kerülővel érjük el: egy sor „segédpontról" mutatjuk meg, hogy mindegy, majd ebből következtetünk arra, hogy A is az.

Az előbb láttuk, hogy S, S_1 ... mind nevezetes pontok. Az AS_iS_{i+1} háromszögek T_i súlypontjai ugyancsak nevezetesek, és ezek mindannyian egy CF-fel párhuzamos egyenesen helyezkednek el. Messe ez az egyenes az AB szakaszt F_1-ben, F_1 az AF-nek F-hez közelebbi harmadolópontja lesz. Az ASS_1 háromszög AT_0 súlyvonala felezi az SS_1 szakaszt, ezért $F_1T_0 < FS$ (egészen pontosan $F_1T_0 = \frac{4}{9}FS$. Hasonlóan

$$F_1T_n < FS_n = \frac{FG}{3^{n+1}}.$$

A T_n pontok mind nevezetesek, és bármely F_1 körüli körbe véges sok kivételével valamennyi beleesik, ezért F_1 is mindegy.

Következőként az AT_iT_{i+1} háromszögek U_i súlypontjait vizsgáljuk. Ezek ugyancsak egy CF-fel párhuzamos egyenesen helyezkednek el, és ennek az AB-vel való F_2 metszéspontjára

$$AF_2 = \frac{2}{3}AF_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 AF.$$

Mivel $F_2U_n < F_1T_n < FS_n$, ezért az U_n pontok egyre közelebb kerülnek F_2-höz: F_2 is mindegy.

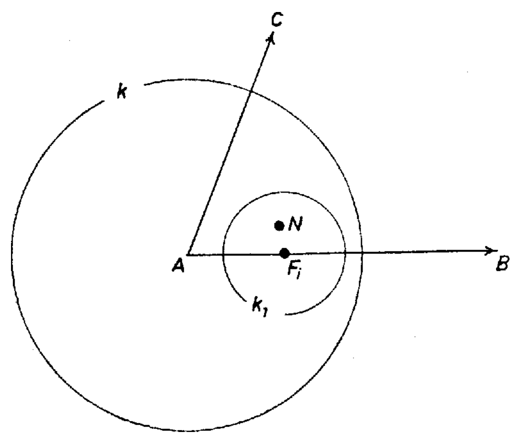
Hasonlóan F_3 is mindegy, ahol F_3 az AF_2 szakasz F_2-höz közelebbi harmadolópontja, azaz

$$AF_3 = \frac{2}{3}AF_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 AF.$$

Általában az AF szakasznak az az F_n pontja is mindegy, amire

$$AF_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n AF.$$

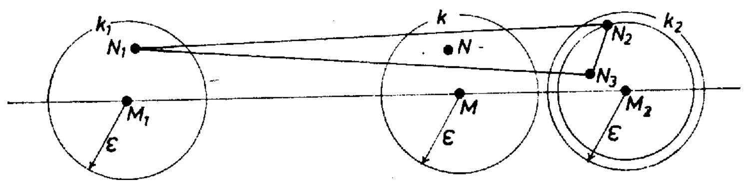
Innen már könnyen következik, hogy az ABC háromszög A csúcsa is mindegy. Vegyünk fel A körül egy tetszőleges k kört. Állítjuk, hogy van k-ban A-tól különböző nevezetes pont. Tudjuk, hogy $(2/3)^n$ az n növekedtével tart a nullához, tehát az F_n pontok véges sok kivételével, mind k belsejébe esnek; legyen F_i ezek közül egy (2. ábra). Rajzoljunk F_i körül olyan k_1 kört, ami teljes egészében k belsejében van, és nem tartalmazza A-t. Az F_i-ről tudjuk, hogy mindegy, ezért van k_1 belsejében (F_i-től különböző) nevezetes pont, legyen az egyik ilyen N. Az N különbözik A-tól és belső pontja k-nak: a keresett pontot megtaláltuk. Így A valóban mindegy, ahogyan állítottuk.



2. ábra

3. A csúcsokról már tudjuk, hogy mindegegyek, most a háromszög kerületének *összes* pontjáról igazoljuk ugyanezt. Újfent kerülő útra kényszerülünk: első nekifutásra csak azt mutatjuk meg, hogy az AB szakasz pontjai közül „elég sok" mindegegy.

Legyen tehát M_1 és M_2 az AB szakasz két olyan pontja, melyekről már tudjuk, hogy mindegegyek. (Például kezdetben legyen $M_1 = A$ és $M_2 = B$.) Állítjuk, hogy az M_1M_2 szakasz mindkét harmadolópontja is mindegegy. Legyen H az M_2-höz közelebbi harmadolópont (a másik eset hasonlóan kezelhető), és rajzoljunk H körül egy ε sugarú k kört (3. ábra).

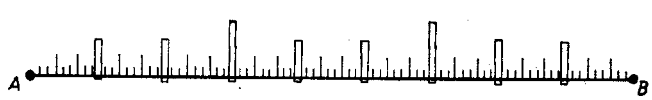


3. ábra

Azt kell megmutatnunk, hogy k-ba esik nevezetes pont. Rajzoljunk M_1 és M_2 köré is egy-egy ε sugarú kört, az előbbi legyen k_1, az utóbbi k_2. Feltevésünk szerint M_1 és M_2 is mindegegy, ezért k_1-nek és k_2-nek is van nevezetes belső pontja: N_1 illetve N_2. Az M_2 középpontú, M_2N_2 sugarú körben is van nevezetes pont, mondjuk N_3. Az N_1, N_2, N_3 három különböző nevezetes pont, tehát N súlypontjuk is nevezetes. Állítjuk, hogy N belső pontja a k körnek és így megtaláltuk, amit kerestünk.

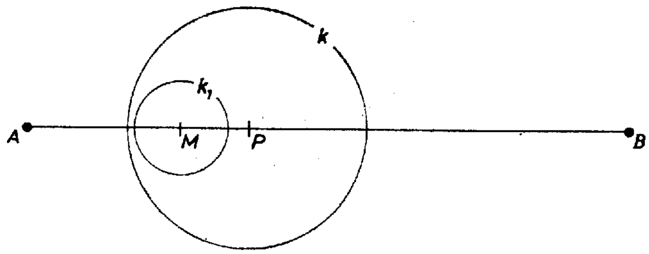
Ez utóbbi állítás igazolására a **lemmát** használjuk az $N_1N_2N_3$, valamint az $M_1M_2M_2$ (elfajult) háromszögekre. Az N_1, N_2 és N_3 pontok választása alapján az N_1M_1, N_2M_2 és N_3M_2 távolságok mindegyike kisebb ε-nál. Az $N_1N_2N_3$ háromszög súlypontja N, az $M_1M_2M_2$ „háromszögé" pedig H. A lemma alapján tehát az NH távolság is kisebb ε-nál: N valóban belső pontja k-nak. (Az olvasóra hagyjuk annak belátását, hogy az N_1, N_2, N_3 pontokat lehet választani úgy is, hogy valódi háromszöget alkossanak, vagyis N_1, N_2 és N_3 ne essen egy egyenesre.)

Ennek alapján az AB szakasz mindkét harmadolópontja mindegegy, azután az így előálló három szakasz mindegyikének harmadolópontjai is mindegegy, az azokat harmadoló pontok is stb. (4. ábra). Vagyis ha valamilyen pozitív egész n-re az AB szakaszt 3^n egyenlő részre osztjuk, az összes osztópont mindegegy lesz.



4. ábra

Most már bizonyítani tudjuk, hogy az AB szakasz *összes* pontja is mindegegy. A szakasz tetszőleges P pontja köré tetszőleges k kört rajzolva a kör belsejébe esik osztópont, ha n-et úgy választjuk, hogy 3^n nagyobb legyen a kör átmérőjének reciprokánál. Erről az M osztópontról tudjuk, hogy mindegegy. Így M körül bármekkora k_1 kört rajzolva találunk k_1-ben nevezetes pontot. De k_1-et tudjuk úgy választani, hogy teljes egészében k-ban legyen – tehát k-ban is van (P-től különböző) nevezetes pont (5. ábra).



5. ábra

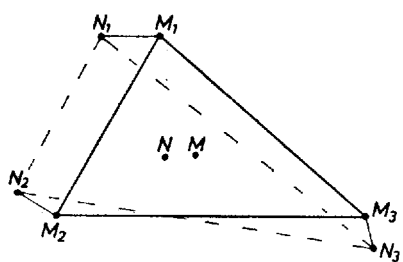
4. Az eddigiek alapján a háromszög kerületének minden pontja mindegegy. Az, hogy a háromszög minden belső- és határpontja is mindegegy –, vagyis a bizonyítandó (*) állítás – innen az alábbiak alapján azonnal adódik:

1) Mindegegy pontokból álló háromszög súlypontja is mindegegy.

2) Ha P az ABC háromszög belső pontja, akkor találhatók a háromszög kerületén olyan (nem egy egyenesre eső) U, V, W pontok, hogy P súlypontja az UVW háromszögnek.

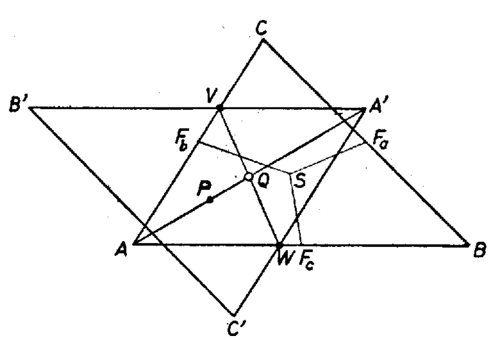
A cikk elején kimondott **tétel** bizonyítását (és ezzel magát a cikket is) befejeztük, mihelyst ezt a két állítást igazoltuk.

(1)-hez legyenek M_1, M_2 és M_3 mindegegy pontok, M pedig az $M_1M_2M_3$ háromszög súlypontja. Válasszunk egy pozitív ε számot, azt kell belátnunk, hogy van olyan nevezetes pont, melynek M-től mért távolsága kisebb ε-nál. Mivel M_1, M_2 és M_3 mindegegy pontok, azért vannak olyan N_1, N_2 és N_3 nevezetes pontok, melyekre az M_1N_1, M_2N_2 és M_3N_3 távolságok mindegyike kisebb ε-nál. Az $N_1N_2N_3$ háromszög N súlypontja is nevezetes pont, távolsága M-től a **lemma** alapján kisebb ε-nál, amivel készen vagyunk.



6. ábra

Vagy mégsem ? Nem bizony ! Meg kell mutatnunk, hogy N_1, N_2 és N_3 választható úgy, hogy valódi háromszöget alkossanak – ez megtehető, ha $M_1M_2M_3$ is valódi háromszög volt. Hogy hogyan, annak meggondolását az olvasóra bízzuk. Végül előfordulhat, hogy N és M egybeesik, noha nekünk M-től különböző nevezetes pontra van szükségünk. Ebben az esetben N_1-et és N_2-t megtartva, N_3 helyett olyan N_3' nevezetes pontot válasszunk, mely M_3-hoz N_3-nál is közelebb van. Az $N_1N_2N_3$ és az $N_1N_2N_3'$ súlypontja nem esik egybe (a két súlypontot összekötő vektor éppen az N_3N_3' vektor harmadrésze), így ez most már különbözik M-től. (1)-et valóban bizonyítottuk.



7. ábra

(2) bizonyítására kössük össze az ABC háromszög S súlypontját az F_A, F_B, F_C oldalfelező pontokkal. Ezzel a háromszög belsejét három négyszögre osztottuk fel, ezek egyikébe (vagy annak határára) esik a P pont, mondjuk abba, amelyiknek az A is csúcsa (7. ábra). A keresett UVW háromszög U csúcsa legyen A, súlypontja pedig P. Így a másik két, V és W csúcsokat összekötő szakasz Q felezőpontját megkaphatjuk úgy, hogy az AP félegyenesre felmérjük az $AQ = \dfrac{3}{2}AP$ távolságot. Ez a Q pont továbbra is belső pontja az ABC háromszögnek – kivéve ha P éppen egybeesik S-sel, de akkor Q a kerületre esik és a (2) állítás automatikusan teljesül. Így feltehetjük, hogy Q belső pont. A V és

W pontokat úgy kaphatjuk, hogy az ABC háromszöget tükrözzük Q-ra. Az így adódó $A'B'C'$ háromszög kerületének, valamint az ABC háromszög kerületének közös pontjai közül bármelyik A-tól és A'-től különböző jó V-nek, annak Q-ra való tükörképe pedig W-nek.

Valóban, ekkor A, V és W az ABC háromszög kerületének pontjai; súlypontjuk pedig P. Végül A, V és W nem eshetnek egy egyenesbe, hiszen akkor P-nek is ugyanerre az egyenesre kellene esnie, és így nem lehetne az AF_CSF_B négyszög pontja.

Azt kell még meggondolnunk, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögeknek van a csúcsoktól különböző közös kerületi pontjuk. Ez pedig azért van így, mert Q belső pontja mindkét háromszögnek. Egy háromszöget és $180°$-os elforgatottját pedig nem lehet úgy elhelyezni a síkon, hogy közös belső pontjuk ugyan legyen, de csúcstól különböző közös határpontjuk ne.

Ezzel igazoltuk a cikk elején kimondott tételt: egy háromszög nevezetes pontjai a háromszög belsejét sűrűn töltik ki. No persze ezek mindegyike nem *annyira* nevezetes, mint mondjuk a magasságpont vagy a beírt kör középpontja, de nevezetes annak értelmében, amit a „nevezetességről" állítottunk.

Ez a paradox – első pillanatban hihetetlen, ám mégis igaz – tétel, ha kicsit mesterkélten is, de rámutat a matematika alkalmazásakor lépten-nyomon előforduló jelenségre. Vizsgálunk valamit – jelen esetben a háromszög nevezetes pontjait. Megfogalmazzuk a matematikai *modellt* – most a nevezetes pontokról szóló (i) és (ii) feltételt –, majd magáról a modellről (és *nem* a vizsgált jelenségről!) állításokat bizonyítunk. Ezek ellentmondhatnak annak, amit józan ésszel elvárunk – túl sok nevezetes pont lett. Mi a teendő? Vagy a matematikai modell volt hibásan felállítva (tehát a nevezetes pontok a rájuk szabott két feltétel közül valamelyiket mégsem elégítik ki), vagy pedig szemléletünk adott hibás képet a jelenségről: a nevezetes pontok várakozásunkkal ellentétben tényleg sokan vannak.

A dilemmának nincs megoldása: az olvasónak magának kell döntenie, melyik változatot fogadja el. S bár itt választásának lényegében nincs tétje, hasonló, de már vérre menő dilemma merül fel a modern fizika matematikai modelljeinél: vajon a (mikro-) fizikai valóságot modelleztük hibásan, vagy az a fizikai világ más-e egészen, mint amit megszoktunk?