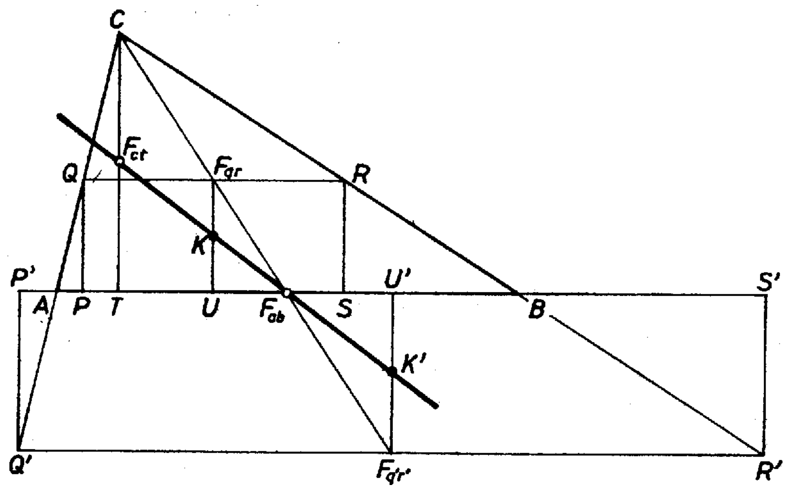
Egy téglalapot az ABC háromszög AB oldala *fölé írt téglalapnak* nevezünk, ha két csúcsa az AB oldalegyenesen, másik két csúcsa pedig a BC, illetve CA oldalegyenesen van. Hasonlóan definiáljuk az AC, valamint BC oldalak fölé írt téglalapokat is.

Nevezetes probléma a következő: adott háromszöghöz található-e mindig három olyan téglalap, amelyeknek középpontja közös, és a háromszög egy-egy oldala fölé vannak írva? A kérdés megválaszolásának egy lehetséges módja, hogy megkeressük az egyik oldal fölé írt téglalapok középpontjainak mértani helyét[1].

11. tétel. *A háromszög egyik oldala fölé írt téglalapok középpontjainak mértani helye az oldal felezőpontját a hozzá tartozó magasságszakasz felezőpontjával összekötő egyenes. (Az egyenesnek az oldallal és a magassággal való metszéspontjaihoz elfajuló téglalapok tartoznak.)*

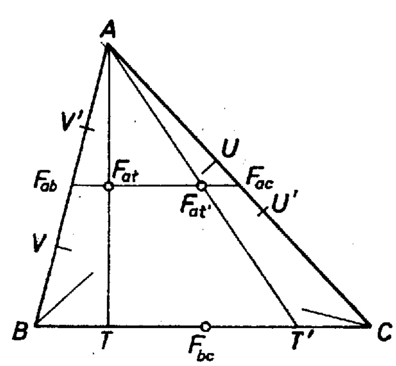


1. ábra

A tételt az AB oldalra igazoljuk. Legyen $PQRS$ az AB fölé írt téglalap (1. ábra). A QR szakasz felezőpontja rajta van a CF_{ab} súlyvonal egyenesén. Vetítsük merőlegesen C-t és a QR szakasz F_{qr} felezőpontját az AB oldalra. A kapott T és U pontokra CT párhuzamos $F_{qr}U$-val. A $PQRS$ téglalap K középpontja ez utóbbi szakasz felezőpontja. Mivel F_{qr} rajta van a CF_{ab} egyenesen, K rajta van a $CF_{ab}T$ háromszög F_{ab} csúcsból induló súlyvonalegyenesén. Ez az egyenes az F_{ab} oldalfelezőpontot a CT magasságszakasz F_{cf} felezőpontjával köti össze. A gondolatmenet megfordítható, segítségével az egyenes minden K pontjához szerkeszthető AB fölé írt, K középpontú téglalap, kivéve ha K az AB vagy a CT egyenesre esik. Ha $AC = CB$, a mértani hely a C-ből induló magasság (az F_{ab} és F_{ct} pontok kivételével).

Ahhoz tehát, hogy létezzenek az oldalak fölé írt, közös középpontú téglalapok, pontosan arra van szükség, hogy a 11. tételben definiált három egyenes egy ponton menjen keresztül. De vajon igaz-e ez? Belátjuk, hogy a válasz igenlő:

12. tétel. *A magasságszakasz felezőpontját a szemközti oldal felezőpontjával összekötő három egyenes egy ponton megy keresztül. Ez a pont a háromszög Lemoine–Grebe-féle pontja, és L-lel fogjuk jelölni.*



2. ábra

Legyen az A-ból, B-ből és C-ből induló magasság talppontja rendre T, U, V, a talppontok tükörképe a megfelelő oldal felezőpontjára T', U', V' (2. ábra). A 4. tétel szerint az AT', BU', CV' Ceva-szakaszok egy pontban találkoznak. Másrészt pl. $BT = CT'$, így $F_{ab}F_{at} = F_{at'}F_{ac} = \dfrac{1}{2}T'C$. Ha S-ből $-1/2$ arányú kicsinyítést hajtunk végre, A képe

[1] Ezzel a kérdéssel foglalkozott az 1955. évi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny II. 3. feladata. Lásd: *Molnár Emil: Matematikai Versenyfeladatok Gyűjteménye*, 74. oldal, 182. feladat.

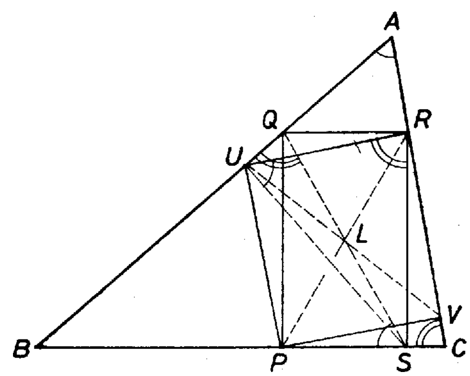
F_{bc} , C képe F_{ab} és T' képe F_{at} lesz, tehát AT' képe $F_{bc}F_{at}$. Ugyanígy BU' és CV' képe $F_{ac}F_{bu}$, ill. $F_{ab}F_{cv}$. Egy ponton átmenő egyenesek tükörképei is egy pontban találkoznak, tehát így az oldalfelezőpontokat a megfelelő magasság felezőpontjával összekötő szakaszok valóban egy pontban találkoznak.

A bizonyítás során az AT, BU, CV Ceva-szakaszokról annyit használtunk ki, hogy egy pontban találkoznak. Beláttuk tehát a következő tételt:

13. tétel. *Ha az AT, BU, CV Ceva-szakaszok egy pontban találkoznak, akkor (és csak akkor) e Ceva-szakaszok felezőpontját a szemközti oldal felezőpontjával összekötő három egyenes, $F_{ab}F_{cv}$, $F_{ac}F_{bu}$ és $F_{bc}F_{at}$ is egy ponton megy keresztül.*

A 11. és 12. tétel alapján a fejezet elején felvetett kérdésre tehát igenlő választ adhatunk. Pontosan egy olyan L pont van, amely egyszerre középpontja a három oldal fölé írt egy-egy téglalapnak: Sőt: L-en kívül nincs olyan pont, amely akár két oldal fölé írt téglalapnak közepe lenne.

A felvetett kérdést látszólag teljesen elintéztük. Valójában a három oldal fölé írt, L közepű téglalapoknak sok érdekes tulajdonsága van, s ez az L pont számos tulajdonságára is fényt vet.



3. ábra

Tükrözzük L-re a BC oldalt, messe a tükörkép az AB egyenest Q-ban, AC-t R-ben. Legyen Q és R merőleges vetülete a BC oldalon P és S (3. ábra), $PQRS$ téglalap lesz. Ha L középpontja egy BC fölé írt téglalapnak, ez a téglalap középpontosan szimmetrikus L-re, tehát csakis ez a $PQRS$ téglalap lehet. De ekkor R és Q tükörképe éppen P és S. Tükrözzük most L-re az AC egyenest. AC-n rajta van R, ezért P rajta van a tükörképén, vagyis a tükörkép-egyenes a BC oldalt P-ben metszi, messe az AB oldalt U-ban. Tudjuk, hogy van AC fölé írt, L középpontú téglalap. Ez a téglalap tükrös L-re, tehát három csúcsa csakis P, U, R lehet. Negyedik csúcsa pedig U-nak L-re vonatkozó tükörképe, V. Vegyük észre, hogy ekkor $QVSU$ szintén téglalap, hiszen tükrös L-re, átlói metszéspontjára, továbbá $QS = RP = UV$, tehát átlói egyenlőek. Vagyis $QVSU$ az AB fölé írt téglalap! Ismét beláttuk tehát, hogy ha van L középpontú BC és AC fölé írt téglalap, akkor van L középpontú AB fölé írt téglalap is.

14. tétel. *Egyetlen olyan pont van a síkon, amely egyszerre középpontja egy-egy BC és AC fölé írt téglalapnak, ez a pont a háromszög Lemoine–Grebe-féle pontja. A két téglalapnak egy szemben fekvő csúcspára közös. A másik két csúcspár az AB fölé írt, L közepű téglalapot határozza meg. A három téglalap hat csúcsa egy L közepű körön van.*

Az $URS\sphericalangle$ és $ACB\sphericalangle$ merőleges szárú szögek, tehát $URS\sphericalangle = \gamma$. Ugyanígy $RUS\sphericalangle = \alpha$ és $USR\sphericalangle = \beta$, ezért az USR és ABC hasonló háromszögek:

$SR : RU : US = BC : CA : AB.$

Másrészt L távolsága a BC, CA, AB oldalaktól rendre $\frac{1}{2}SR$, $\frac{1}{2}RU$ és $\frac{1}{2}US$, amiből az alábbi tételt kaptuk:

15. tétel. *Az L pontnak az AB, BC, CA oldalaktól mért távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint e három oldal hossza.*

Látni fogjuk, hogy ez a tulajdonság egyértelműen jellemzi a Lemoine–Grebe-pontot. Tekintsük az $UQRS$ húrnégyszöget! Láttuk, hogy $URS\sphericalangle = ACB\sphericalangle$. Másrészt a kerületi szögek tétele szerint $URS\sphericalangle = UQS\sphericalangle$, tehát $BQS\sphericalangle = \gamma$, hasonlóan $BSQ\sphericalangle = \alpha$. Ha egy QS szakasz végpontjai AB-n, ill. BC-n vannak, továbbá AB-vel γ, BC-vel α szöget zár be, akkor a QS-t AC-vel *antiparalelnek* nevezzük. A háromszög oldalaival antiparalel például a magasságpont talppon-ti háromszögének oldalai. Láttuk, hogy QS antiparalel AC-vel. Természetesen PR antiparalel AB-vel és UV BC-vel. Valamely oldallal antiparalel szakaszok párhuzamosak egymással, tehát L-en keresztül minden oldallal csak egy antiparalel húzható. A következő tételhez jutunk:

16. tétel. *Ha L-en keresztül a három oldallal antiparalel szakaszokat fektetünk, a szakaszok egyenlő hosszúak és L felezi őket (tehát végpontjaik egy L közepű körön vannak). Bármely két szakasz végpontjai – valamelyik oldal fölé írt – L közepű téglalapot alkotnak.*

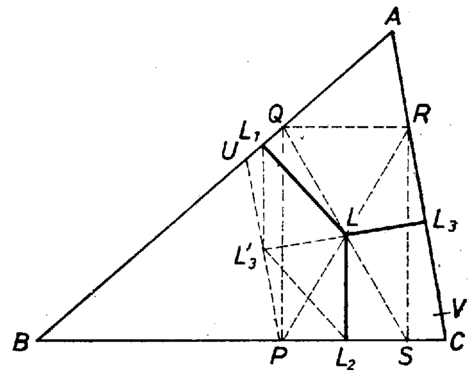
*

5. feladat. *Igazoljuk, hogy L távolsága az ABC háromszög oldalaitól rendre*

$$\frac{2t}{a^2+b^2+c^2}\cdot a,\quad \frac{2t}{a^2+b^2+c^2}\cdot b \quad \text{és} \quad \frac{2t}{a^2+b^2+c^2}\cdot c,$$

ahol t az ABC háromszög területét jelöli.

*



4. ábra

Jelöljük L vetületét az UQ, PS és UP szakaszon rendre L_1, L_2, L_3'-mal (4. ábra). L_1 felezi az UQ szakaszt, L_2 a PS szakaszt és L_3' az UP szakaszt. Tehát $LL_1L_3'L_2$ négyszög paralelogramma, hiszen az $SQUP$ négyszög oldalainak felezőpontjaiból alkotott négyszög, és bármely négyszög felezőpontjaiból alkotott négyszög paralelogramma (1. pl. Geometriai feladatok gyűjteménye I. 558. feladat). Tehát LL_3' és L_1L_2 felezi egymást. Legyen L vetülete az RV szakaszon L_3. $RV||UP$, ezért L_3, L, L_3' egy egyenesen van. Ezért az LL_3 egyenes felezi az L_1L_2 szakaszt, vagyis LL_3 egyenes az $L_1L_2L_3$ háromszög L_1L_2 oldalához tartozó súlyvonal. Az okoskodás az $L_1L_2L_3$ háromszög másik két oldalára is elmondható, tehát L az $L_1L_2L_3$ háromszög súlyvonalainak metszéspontja, vagyis az $L_1L_2L_3$ háromszög súlypontja.

Az X pont *talpponti háromszögének* nevezzük – egy adott háromszögre vonatkozóan – azt az $X_1X_2X_3$ háromszöget, amelynek három csúcsa X merőleges vetülete a három oldalon. (A szokásos értelemben vett talpponti háromszög tehát a magasságpont talpponti háromszöge.) Ezzel az elnevezéssel eredményünk következőképp fogalmazható:

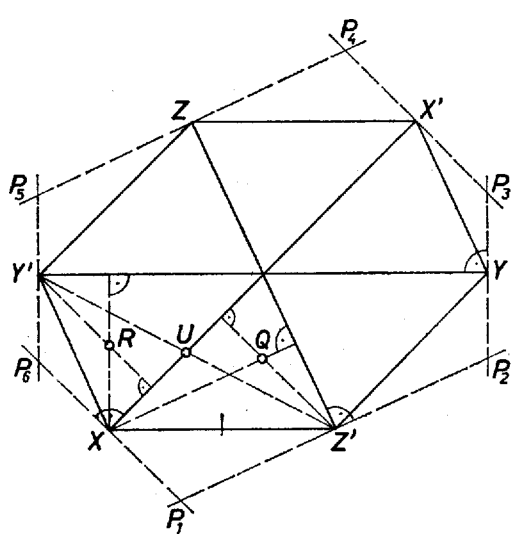
17. tétel. *A Lemoine–Grebe-pont súlypontja a saját talpponti háromszögének.*

Igaz ennek megfordítása is:

17'. tétel. *A Lemoine–Grebe-pont az egyetlen olyan pont, amely súlypontja saját talpponti háromszögének.*

Ennek bizonyításához szükségünk lesz a következő, önmagában is szép tételre, amely bizonyos értelemben a 14. és 16. tételek „megfordítása”.

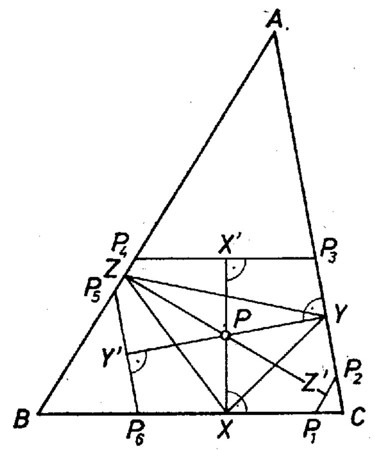
18. tétel. *Tükrözzük az XYZ háromszöget S súlypontjára, jelöljük a tükörképet $X'Y'Z'$-vel. X-ben, X'-ben XX'-re; Y-ban, Y'-ben YY'-re; Z-ben, Z'-ben ZZ'-re merőlegest állítva egy hatszöget kapunk. E köré kör írható, melynek középpontja S, továbbá a hatszög szemközti oldalai téglalapokat alkotnak.*



5. ábra

Legyen a kapott hatszög hat csúcsa az 5. ábra szerinti sorrendben $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ (ez hurkolt hatszög is lehet). A hatszög tükrös S-re, tehát két-két szemben fekvő csúcspár paralelogrammát alkot. Ha belátjuk, hogy XX', YY', ZZ' e paralelogrammák középvonala, akkor pl. P_1P_3 párhuzamos XX'-vel, következésképp P_1P_3 merőleges P_3P_4-re és P_6P_1-re, tehát $P_1P_3P_4P_6$ valóban téglalap. Hasonlóan $P_1P_2P_4P_5$ és $P_2P_3P_5P_6$ is téglalap, tehát a hatszög köré írható kör, és annak középpontja S.

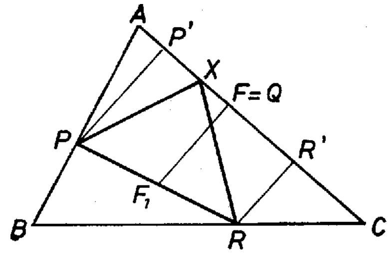
Elég tehát belátni, hogy pl. a $P_1P_6P_4P_3$ paralelogrammának XX' középvonala, és ehhez elég annyit belátni, hogy X felezi a P_1P_6 szakaszt. Tükrözzük P_1-et XZ' felezőpontjára, legyen a tükörkép Q. $\overrightarrow{XQ} = \overrightarrow{P_1Z'}$ és $\overrightarrow{P_1Z'}$ merőleges az SZ' egyenesre, tehát XQ is merőleges SZ'-re. Ugyanígy $\overrightarrow{QZ'} = \overrightarrow{XP_1}$ és $\overrightarrow{XP_1}$ merőleges az SX egyenesre. XQ és $Z'Q$ tehát az SXZ' háromszög magasságai, Q pedig e háromszög magasságpontja. Az okoskodás megismétlésével azt kapjuk, hogy ha P_6-ot az XY' felezőpontjára tükrözzük, a kapott R tükörkép az SXY' háromszög magasságpontja. S súlypontja az XYZ és $X'Y'Z'$ háromszögeknek, ezért S-et az $Y'Z'$ szakasz U felezőpontjára tükrözve X-et kapjuk (ugyanis $2SU = SX' = SX$). Következésképp az SXZ' háromszöget U-ra tükrözve az XSY' háromszög adódik, a Q magasságpont tükörképe pedig R. Ebből $\overrightarrow{Y'R} = \overrightarrow{QZ'}$. De $\overrightarrow{Y'R} = \overrightarrow{P_6X}$ és $\overrightarrow{QZ'} = \overrightarrow{XP_1}$, tehát $\overrightarrow{P_6X} = \overrightarrow{XP_1}$, X valóban felezi a P_6P_1 szakaszt. Ezzel a 18. tételt bebizonyítottuk.



6. ábra

Most rátérünk a 17'. tétel bizonyítására. Legyen P olyan pont, amely súlypontja saját talpponti háromszögének. Belátjuk, hogy, mindhárom oldal fölé írható egy-egy P közepű téglalap. Legyen P merőleges vetülete a BC, CA, AB oldalakon rendre X, Y, Z (6. ábra). Feltevésünk szerint P súlypontja az XYZ háromszögnek. Tükrözzük X, Y, Z-t P-re, a tükörképek legyenek X', Y', Z'. Állítsunk merőlegest X-ben és X'-ben XX'-re, Y-ban és Y'-ben YY'-re és Z-ben, Z'-ben ZZ'-re, az X, Y, Z-ben állított merőlegesek éppen a háromszög oldalai lesznek. A hat merőleges által alkotott hatszög hat csúcsa tehát a háromszög oldalain van. Legyen a hat csúcs a 6. ábra szerint $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$. A 18. tétel alapján $P_1P_3P_4P_6$, $P_1P_2P_4P_5$ és $P_2P_3P_5P_6$ téglalap, és mindháromnak P a középpontja. E három téglalap rendre a BC, AB, CA oldal fölé írt P közepű téglalap. P tehát a 14. tétel pontjának tulajdonságaival rendelkezik, így köteles a háromszög Lemoine–Grebe-pontja lenni. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A 17'. tétel segítségével egy szélsőérték problémát is megoldhatunk. Nevezzük a PQR háromszöget az ABC háromszög *beírt háromszögének*, ha három csúcsa az ABC háromszög három oldalának egy-egy pontja. Ismeretes, hogy a beírt háromszögek közül a magasságpont talpponti háromszögének legkisebb a kerülete. Most belátjuk, hogy egy beírt háromszög oldalainak négyzetösszege akkor minimális, ha az a Lemoine–Grebe-pont talpponti háromszöge. Legyen ugyanis PQR olyan beírt háromszög, amire ez a négyzetösszeg minimális, és legyen a P, R pontok vetülete az AC oldalon P', R' (7. ábra). Jelölje F a $P'R'$ szakasz felezőpontját. Legyen az AC szakasz egy tetszőleges pontja X, és x az XF szakasz előjeles hossza.



7. ábra

A $PP'X$ és $RR'X$ derékszögű háromszögekre felírjuk a Pitagorasz-tételt, és felhasználjuk, hogy $P'F = FR'$.

$$PX^2 + XR^2 = PP'^2 + (P'F - x)^2 + RR'^2 +$$
$$+(x + FR')^2 = PP'^2 + RR'^2 + 2P'F^2 + 2x^2.$$

Ez pedig akkor minimális, ha $x = 0$ azaz $X = F$. Következésképp ha PQR háromszög oldalainak négyzetösszege minimális, akkor $Q = F$. Állítsunk F-ben merőlegest AC-re, s messe ez PR-t F_1-ben. FF_1, vagy ami ugyanaz, QF_1 középvonala a $PP'R'R$ derékszögű trapéznak, tehát F_1 felezi PR-t, QF_1 súlyvonala a PQR háromszögnek. Ezért PQR súlypontjának AC-re eső talppontja éppen Q. Hasonló igaz a P és R pontokra is, tehát az alábbi tételt kaptuk:

19. tétel. *Ha a beírt PQR háromszög oldalainak négyzetösszege minimális, akkor a PQR háromszög saját súlypontjának talpponti háromszöge.*

Összehasonlításul érdemes megjegyezni, hogy a háromszög magasságai szögfelezők a magasságpont talpponti háromszögében. Következésképp az ABC háromszögbe írt minimális kerületű háromszög saját beírt köre közepének talpponti háromszöge (l. pl. Coxeter–Greitzer: Az újra felfedezett geometria, 37. oldal).

Végül a 19. és 18. tételből következik a

20. tétel. *Ha a PQR beírt háromszög oldalainak négyzetösszege minimális, akkor a PQR háromszög a Lemoine–Grebe-féle pont talpponti háromszöge.*

*

6. feladat. Az eddig elmondottakból még nem következik, hogy a Lemoine–Grebe pont talpponti háromszöge az a beírt háromszög, amelyben minimális az oldalak négyzetösszege. Miért nem?

7. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha a PQR beírt háromszögben az oldalak negyedik (általában $2k$-adik pozitív egész) hatványának összege minimális, akkor PQR az L pont talpponti háromszöge.

Érdekes volna tudni, hogy akármilyen l természetes számra igaz-e, hogy ha a PQR beírt háromszögben az oldalak l-edik hatványának összege minimális, akkor a PQR háromszög valamely pont talpponti háromszöge. $l = 1$-re ez igaz és páros l-re a 7. feladat szerint szintén igaz.

*

Most visszatérünk a 16. tételhez, s annak segítségével az L Lemoine–Grebe-pont újabb tulajdonságait igazoljuk. Nyilvánvaló, hogy egy oldallal antiparalel szakaszok mind párhuzamosak, így e szakaszok felezőpontjai egy egyenest alkotnak, amely átmegy az oldallal szemközti csúcson, de maga a csúcs nem tartozik a mértani helyhez. Az is nyilvánvaló, hogy ha egy antiparalel szakaszt tükrözünk a szemközti csúcs belső szögfelezőjére, a tükörkép az oldallal párhuzamos szakasz, aminek végpontjai a szemközti csúcsból induló két oldalon vannak. Az ilyen szakaszok felezőpontjainak mértani helye a súlyvonal. A következő tételhez jutottunk:

21. tétel. *Az AB oldallal antiparalel szakaszok felezőpontjainak mértani helye egy C-n átmenő egyenes, melynek a C-ből induló belső szögfelezőre való tükörképe a súlyvonal. Ezt az egyenest a C-ből induló szimmediánnak nevezik, t_c-vel fogjuk jelölni.*

A szimmediánok a háromszög kevéssé ismert, de fontos transzverzálisai. Látni fogjuk, hogy tulajdonságai szervesen illeszkednek a háromszög nevezetes pontjai és szakaszai közé (vö. a 20. tétel után mondottakkal).

*

8. feladat. Legyen az ABC háromszög A-ból és B-ből induló magasságainak talppontja T és U. Igazoljuk, hogy a t_c szimmedián felezi az UT szakaszt.

*

A 16. tétel szerint az L pont felezi a rajta átmenő, a háromszög oldalaival antiparalel szakaszokat. Ekkor a 21. tétel szerint L rajta van mindhárom csúcsból induló szimmediánon. Igaz tehát az alábbi tétel:

22. tétel. *A háromszög három szimmediánja egy pontban találkozik, a háromszög Lemoine–Grebe-féle pontjában.*

Az L pont következő tulajdonságának igazolásához egy egyszerű definícióra és egy segédtételre van szükségünk. Az ABC háromszög síkjában levő P pontnak egy oldaltól vett előjeles távolsága *pozitív*, ha P az oldalegyenesnek arra az oldalára esik, ahol a háromszög szemközti csúcsa van. Ha P a másik félsíkba esik, a távolság negatív, magán a oldalegyenesen persze 0.

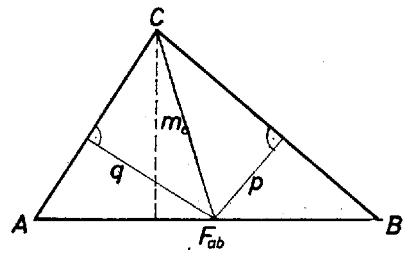
Segédtétel. *Azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyek távolsága a BC és CA oldalegyenestől adott $x : y$ arányú, egy, a C csúcson átmenő egyenes. Ha ezt az egyenest a C csúcsból induló belső szögfelezőre tükrözzük, akkor az új egyenes pontjainak távolsága a BC és CA oldalaktól $y : x = \frac{1}{x} : \frac{1}{y}$ arányú.* (Feltesszük, hogy $xy \neq 0$, egyébként x, y tetszőleges.)

A segédtétel első fele közismert. Második fele következik abból, hogy ha a C-ből induló szögfelelzőre tükrözünk, BC és CA helyet cserél.

*

9. feladat. Hogyan módosul a segédtétel állítása, ha a C-ből induló külső szögfelezőre tükrözünk?

*



8. ábra

Legyen az AB oldal F_{ab} felezőpontjának távolsága BC-től p, CA-tól q (8. ábra). A CBF_{ab} és a CAF_{ab} háromszögek BF_{ab} és AF_{ab} oldala, valamint az ezekhez tartozó (közös) m_c magasság egyenlő, tehát a háromszögek területe egyenlő. Következésképp $CB \cdot p = AC \cdot q$, tehát $\frac{p}{q} = \frac{AC}{CB}$. F_{ab} rajta van a C-ből induló súlyvonalon, így a segédtételt felhasználva a következő tételhez jutunk:

23. tétel. *A C-ből induló súlyvonal azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyek távolsága a BC, CA oldaltól $CA : CB$ arányú. A C-ből induló szimmedián azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyek távolsága a BC, CA oldaltól $CB : CA$ arányú.*

A szimmediánnak most bizonyított tulajdonsága módot ad annak igazolására, hogy a 15. tétel állítása az ABC háromszög belső pontjai közül csakis a Lemoine–Grebe pontra áll. Az ABC háromszög belső pontjának a három oldaltól vett távolsága nyilván pozitív. Ha a BC és CA oldaltól vett távolságok aránya $BC : CA$, akkor a fenti tétel szerint a pont rajta van a C-ből induló szimmediánon. Hasonlóan ha a BC, CA, AB oldalaktól vett távolságok (ilyen sorrendben) $BC : CA : AB$ arányúak, akkor a pontnak mindhárom szimmediánon rajta kell lennie. Következésképp csak egy ilyen pont van, s ez a Lemoine–Grebe pont. Beláttuk az alábbi tételt:

24. tétel. *Egyetlen olyan pont van a háromszög belsejében, amelynek a BC, CA és AB oldalaktól vett távolsága (ilyen sorrendben) $BC : CA : AB$ arányú. Ez a pont a háromszög Lemoine–Grebe-pontja.*

Az imént bizonyított tétellel kapcsolatban két dolgot érdemes megjegyezni. Egyrészt új bizonyítást kaptunk a 22. tételre, amely egyszerűbb is, mert nem használja az antiparalel szakaszok tulajdonságait, bár nem mutat rá közvetlenül a Lemoine–Grebe-pont többi tulajdonságának és a szimmediánok kapcsolatára. A 27. tételben még egyszer igazoljuk, hogy a szimmediánok egy pontban találkoznak, ez az L pont újabb tulajdonságára fog fényt vetni.

Másrészt a most bizonyított tétel egy lényegesen általánosabb tétel bizonyítását is adja.

24'. tétel. *Ha x, y, z pozitív számok, akkor a háromszög síkjában egyetlen olyan $X(x : y : z)$ pont van, amelynek a BC, CA, AB oldalaktól vett távolsága (ilyen sorrendben) $x : y : z$ arányú. Ez a pont találkozási pontja azoknak az e, f, g egyeneseknek, ahol e azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyeknek az AB és AC oldaltól mért távolsága $z : y$ arányú, s hasonlóan definiáljuk f-et és g-t.*

Ha e-t az A-ból, f-et a B-ből, g-t a C-ből induló belső szögfelezőre tükrözzük, a tükörképek ismét egy ponton mennek át, az $X'\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}\right)$ ponton, aminek távolsága a BC, CA, AB oldaltól (ilyen sorrendben) $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$ arányú.

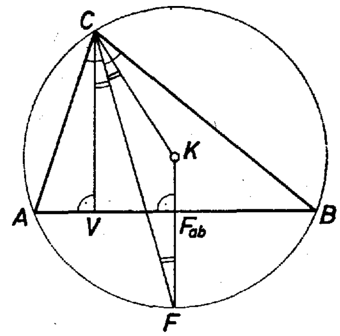
A bizonyításhoz elég a következőket meggondolni. A 23. tétel előtti segédtétel szerint az e, f, g mértani helyek valóban egyenesek. Ha x, y és z pozitív, e három egyenes áthalad a háromszög belsején és egy-egy csúcsán. Következésképp az e, f, g egyenesek páronként metszik egymást a háromszög belsejében. Bármely kettő metszéspontján át kell haladnia a harmadiknak, hiszen pl. e és f metszéspontjának a CA és AB oldalaktól vett távolsága $(y : z) : (x : z) = y : x$ arányú. A három egyenes közös pontjának az oldalaktól vett távolsága $x : y : z$ arányú. Más ilyen pont nincs, hiszen az ilyen pontnak az e, f, g egyenesek mindegyikén rajta kell lennie.

A tétel második része következik abból, hogy az említett segédtétel szerint e-t a belső szögfelezőre tükrözve olyan e' egyenest kapunk, amely pontjainak távolsága az AB, AC oldaltól $\frac{1}{x} : \frac{1}{y}$ arányú. Hasonló állítás igaz az f' és g' egyenesekre is, e', f' és g' tehát éppen az $X'\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}\right)$ pontban találkozik.

Marad a kérdés, hogy hogyan módosul a 24'. tétel, ha x, y, z-ről nem kötjük ki, hogy pozitívak, hanem csak annyit, hogy egyikük sem nulla. Az e, f, g mértani helyek ekkor is egyenesek, s ha közülük kettő metszi egymást, metszéspontjukon a harmadik is átmegy. Általában tehát e, f, g vagy egy pontban találkozik, vagy páronként párhuzamosak. Utóbbi esetben célszerű felvenni egy „végtelen távoli pontot”, ahol e, f, g és a velük párhuzamos egyenesek „metszik egymást”, és ezt a „pontot” $X(x : y : z)$-vel jelölni. Ha ezekkel a „végtelen távoli pontokkal” bővítjük a síkot (minden irányhoz egy-egy ilyen pont tartozik), akkor a 24’. tétel minden megszorítás nélkül érvényben marad. A tétel második részét azonban érdemes külön is megfogalmazni:

Következmény. *Ha e, f, g az ABC háromszög három, egy ponton átmenő transzverzálisa, s mindegyiket tükrözzük a vele egy csúcsból induló belső szögfelezőre, akkor a kapott három tükörkép is vagy egy ponton megy át, vagy párhuzamosak.*

Ha például e, f, g a három súlyvonal, ezek az $S(m_a : m_b : m_c)$ pontban találkoznak. Tükörképeik éppen a szimmediánok, metszéspontjuk az
$L\left(\frac{1}{m_a} : \frac{1}{m_b} : \frac{1}{m_c}\right) = L(a : b : c)$ Lemoine–Grebe-pont. Ha e, f, g a három magasság, ezek az M pontban találkoznak. A magasság tükörképe a megfelelő szögfelezőre a csúcsot a körülírt kör K közepével összekötő egyenes.



9. ábra

(A bizonyítás leolvasható a 9. ábráról: KF_{ab} merőleges AB-re, tehát párhuzamos a CV magassággal. KF_{ab} a körülírt kört az AB ív F felezőpontjában metszi, FC tehát a C-nél levő szög belső szögfelezője. De a párhuzamosság miatt $VCF\sphericalangle = CFK\sphericalangle$, másrészt CFK háromszög egyenlő szárú, tehát $CFK\sphericalangle = FCK\sphericalangle$. Ebből azt kapjuk, hogy a CF szögfelező valóban felezi a VCK szöget: a CV magasságegyenes tükörképe a CF belső szögfelezőre valóban a CK egyenes.) K távolsága a BC, CA, AB oldaltól rendre $r\cos\alpha$, $r\cos\beta$, $r\cos\gamma$, ahol r a körülírt kör sugara. Tehát $K(\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma)$ a körülírt kör középpontja. A 24’. tétel szerint tehát a magasságpont $M(\cos\beta\cos\gamma : \cos\gamma\cos\alpha : \cos\alpha\cos\beta)$.

*

10. feladat. Bizonyítsuk be közvetlenül a magasságpontról szóló fenti állítást! Igazoljuk, hogy az M magasságpont távolsága a BC oldaltól $2r\cos\beta\cos\gamma$.

11. feladat. Igazoljuk, hogy a Feuerbach-kör középpontjának távolsága a három oldaltól úgy aránylik egymáshoz, mint $\cos(\beta-\gamma)$, $\cos(\alpha-\gamma)$, $\cos(\beta-\alpha)$. Adjunk a szögek segítségével szükséges és elégséges feltételt arra, hogy a Feuerbach-kör közepe valamelyik oldal egyenesére essen!

12. feladat. Hogyan módosul a 24’. tétel állítása, ha pl. e-t (g-t és f-t) a háromszög megfelelő külső szögfelezőjére tükrözzük?

13. feladat. Jelölje k_{ab} azt a kört, amely keresztül megy az A, B pontokon, s amelynek a CA oldalegyenes érintője, k_{ba} pedig azt a kört, amely keresztülmegy az A, B pontokon és a CB egyenes az érintője. Hasonlóan definiáljuk a k_{ac}, k_{ca}, k_{bc}, k_{cb} köröket. Igazoljuk, hogy k_{ab}, k_{bc}, k_{ca} körök egy X ponton mennek keresztül, k_{ba}, k_{cb}, k_{ac} körök pedig egy X' ponton. (X és X' a háromszög ún. *Brocard*-pontjai.) Igazoljuk, hogy AX-nek az A-ból induló, BX-nek a B-ből, CX-nek a C-ből induló belső szögfelezőre vonatkozó tükörképe rendre az AX', BX', CX' egyenes.

14. feladat. Igazoljuk, hogy a két Brocard-pont talpponti háromszöge hasonló az ABC háromszöghöz.

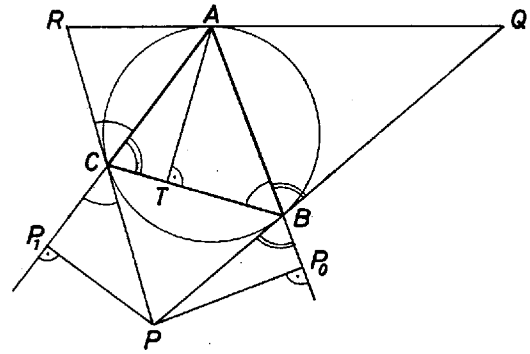
15. feladat. Igazoljuk, hogy a két Brocard-pont éppen az $X\left(\frac{b}{c} : \frac{c}{a} : \frac{a}{b}\right)$ és az $X'\left(\frac{c}{b} : \frac{a}{c} : \frac{b}{c}\right)$.

16. feladat. A 4. tételben egy transzformációt adtunk meg, amely minden X ponthoz, ha az nem illeszkedik a háromszög oldalegyeneseire, egy X_0 pontot rendel. Igazoljuk, hogy ha X az $X(x : y : z)$ pont, akkor X_0 az $X_0\left(\frac{1}{a^2x} : \frac{1}{b^2y} : \frac{1}{c^2z}\right)$ pont!

*

Ez után a kitérő után az L pontnak egy újabb tulajdonságát mutatjuk be. Láttuk, hogy a súlypont és az L pont között szoros összefüggés van (vö. a 17. és a 22. tételt). A mostani tétel az L pontot a Gergonne-ponttal hozza kapcsolatba.

25. tétel. *Tegyük fel, hogy az ABC háromszög nem derékszögű. Körülírt körének az A, B, C pontban húzott érintői egy olyan PQR háromszöget alkotnak, amelynek Gergonne-pontja megegyezik az ABC háromszög Lemoine–Grebe-pontjával.*



10. ábra

A bizonyításban egyelőre feltesszük, hogy az ABC háromszög hegyesszögű. Legyen a B-ben és C-ben húzott érintő metszéspontja P, a C-ben és A-ban húzott érintőké R, az A-ban és B-ben húzottaké Q (10. ábra). A PQR háromszög Gergonne-pontja a PA, RB, QC egyenesek metszéspontja. A tétel bizonyításához tehát azt kell belátni, hogy PA, RB, QC az ABC háromszög szimmediánjai, hiszen ezek metszéspontja éppen az ABC háromszög Lemoine–Grebe-pontja. Nyilván elég ezt a PA egyenesről belátni. A 23. tétel szerint pedig ehhez elég, hogy valamely A-tól különböző pontjának távolsága az AB és AC oldaltól $AB : AC$ arányú. Válasszuk ezt a pontot P-nek. Azt kell igazolnunk, hogy $PP_0 : PP_1 = AB : AC$, ahol P_0 és P_1 a P vetülete az AB, ill. az AC oldalon.

Tudjuk, hogy $PCP_1\sphericalangle = RCA\sphericalangle = ABC\sphericalangle$ (a kerületi és érintőszög egyenlősége alapján), s hasonlóan $PBP_0\sphericalangle = ABQ\sphericalangle = ACB\sphericalangle$. Legyen A vetülete BC-n a T pont. Ekkor CAT és BPP_0 valamint BAT és CPP_1 hasonló háromszögek, mert két-két szögük megegyezik. Az előbbiből $CA : AT = BP : PP_0$, az utóbbiból $BA : AT = CP : PP_1$. Ezek hányadosa

$$CA : BA = (BP : CP) : (PP_1 : PP_0).$$

Itt BP és CP közös pontból húzott érintő szakaszok, tehát $CA : BA = PP_1 : PP_0$, amiből a kívánt állítás átrendezéssel következik.

*

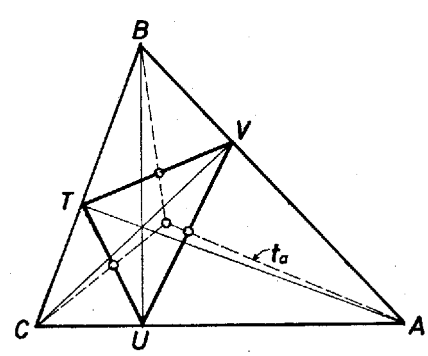
17. feladat. Igazoljuk, hogy ha A-nál derékszög van, akkor az A-n átmenő szimmedián párhuzamos a B és C-ben húzott érintőkkel!

18. feladat. Döntsük el, hogy jó-e a fenti bizonyítás, ha A-nál tompaszög van. Hogyan módosul a bizonyítás, ha B-nél (vagy C-nél) van tompaszög?

19. feladat. A k körhöz a külső P pontból meghúzzuk az érintőket, az érintési pontok X és Y. A k kör egy további pontja Z. Igazoljuk, hogy a PZ egyenes az XY szakaszt $XZ^2 : YZ^2$ arányban osztja.

*

A Gergonne-pont és a Lemoine-pont között van még egy érdekes összefüggés. Legyen a hegyesszögű ABC háromszög A-ból, B-ből, C-ből induló magasságának talppontja a szemben levő oldalon rendre T, U, V. Az UV szakasz antiparalel BC-vel, tehát az A-ból induló t_a szimmedián felezi UV-t (21. tétel).



11. ábra

Ismert, hogy a TUV háromszög hozzáírt köreinek középpontja rendre A, B és C, hiszen a magasságok felezik az UVT háromszög szögeit, ezért az AB, BC, CA egyenesek az UVT háromszög külső szögfelezői (11. ábra). Az ABC háromszög t_a szimmediánja tehát azonos a TUV háromszög UV oldalához írt kör középpontját az UV oldal felezőpontjával összekötő egyenessel. A 10. tétel szerint ez az egyenes átmegy a TUV háromszög középvonal háromszögének Gergonne-pontján. Beláttuk tehát az alábbi tételt:

26. tétel. *A hegyesszögű ABC háromszög szimmediánjai átmennek a magasságponthoz tartozó talpponti háromszög középvonalháromszögének Gergonne-pontján. Az ABC háromszög Lemoine–Grebe-pontja tehát a magasságponthoz tartozó talpponti háromszög középvonalháromszögének Gergonne-pontja.*

Érdekes eredményre jutunk, ha a 25. és 26. tételt összevetjük. Ha XYZ nem derékszögű háromszög, akkor a 25. tétel szerint beírt körének érintési pontjai olyan $X'Y'Z'$ háromszöget alkotnak, amelynek Lemoine-pontja az XYZ háromszög Gergonne-pontjával egyezik meg. Másrészt az $X'Y'Z'$ háromszög talpponti háromszögének középvonalháromszöge olyan, hogy Gergonne-pontja megint csak megegyezik az $X'Y'Z'$ háromszög Lemoine-pontjával. Ha ebből az utoljára kapott háromszögből megint képezzük a beírt körének érintési pontjai által alkotott háromszöget, ennek a háromszögnek a Lemoine–Grebe-pontja azonos lesz az $X'Y'Z'$ háromszög Lemoine–Grebe-pontjával.

Hogy kapott eredményünket egyszerűbben kifejezhessük, bevezetjük a következő jelöléseket. Az XYZ háromszög beírt körének érintési pontjai által alkotott háromszöget $eXYZ$ jelöli, az XYZ háromszög középvonalháromszögét $kXYZ$, az XYZ háromszög magasságtalppontjai alkotta háromszögét pedig $tXYZ$. A magasságtalppontok alkotta háromszög középvonalháromszöge tehát $ktXYZ$. A 26. tétel ezzel a jelöléssel így fogalmazható: $ktXYZ$ háromszög Gergonne-pontja azonos XYZ háromszög Lemoine-pontjával. A fentebb megfogalmazott követelmények pedig így szólnak: a $kteXYZ$ és XYZ háromszögek Gergonne-pontja, valamint az $ekt\ XYZ$ és az XYZ háromszögek Lemoine-pontja azonos.

Megjegyezzük, hogy $ektXYZ$ és $kteXYZ$ oldalai párhuzamosak az XYZ háromszög megfelelő oldalaival, és XYZ-t egy-egy L, ill. G középpontú tükrözve kicsinyítés viszi át az $ektXYZ$, ill. $kteXYZ$ háromszögbe.

*

20. feladat. Bizonyítsuk be ezt az utóbbi állítást! Igazoljuk, hogy a kicsinyítés aránya az előbbi esetben $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, az utóbbi esetben $\varrho/4r$.

21. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az XYZ háromszöget az $etkXYZ$, $tkeXYZ$, $ketXYZ$ háromszögbe rendre egy-egy K, O, M közepű tükrözve kicsinyítés viszi. A kicsinyítés aránya rendre $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, $\varrho/4r$, $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

22. feladat. Nevezzük az XYZ háromszög kotangens-pontjának (ctg-pontjának) azt a pontot, melynek az YZ, ZX, XY oldalaktól vett távolsága úgy aránylik egymáshoz, mint $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} : \operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2} : \operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$. Igazoljuk, hogy az XYZ háromszöget a $tekXYZ$ háromszögbe a ctg-pontra vonatkozó $\varrho/4r$ arányú tükrözve kicsinyítés viszi.

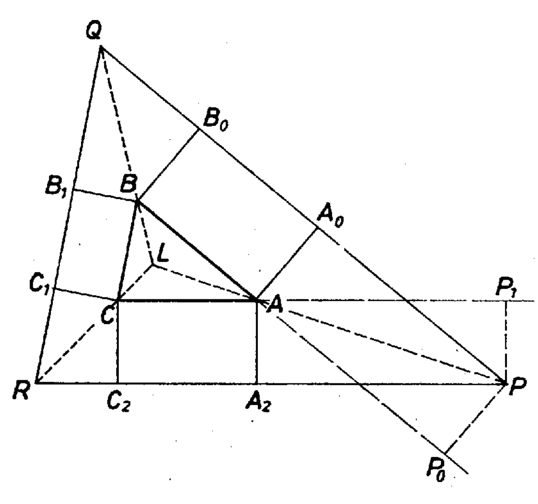
A 20–22. feladatok állításai természetesen csak akkor igazak, ha a háromszögek hegyesszögűek!

23. feladat. Fogalmazzuk meg a 26. tétel megfelelőjét arra az esetre, mikor az ABC háromszög tompaszögű!

*

A 20. feladat szerint az $ektABC$ háromszög az ABC háromszögből L középpontú, $-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ arányú kicsinyítéssel jön létre. A Lemoine–Grebe -pontnak egy további szép tulajdonsága, hogy könnyen jellemezhetők azok a háromszögek, amelyek az ABC háromszögből L középpontú, nyújtással, kicsinyítéssel jönnek létre.

27. tétel. *Írjunk az ABC háromszög oldalaira olyan, egymáshoz hasonló ABB_0A_0, BCC_1B_1, CAA_2C_2 téglalapot, amelyben $AB : BB_0 = BC : CC_1 =$*
$= CA : AA_2 = 1 : \lambda$. (Ha $\lambda > 0$, akkor a téglalapok „kifelé”, ha $\lambda < 0$, akkor a téglalapok „befelé” állnak. $|\lambda| = 1$ esetén a téglalapok négyzetek.) Tekintsük az A_0B_0, B_1C_1, C_2A_2 egyenesek határolta (az ABC háromszöghöz hasonló) háromszöget. Ez a háromszög az ABC háromszögnek L-ből nyújtott (kicsinyített) képe.



12. ábra

A bizonyításhoz legyen C_2A_2 és A_0B_0 egyenesek metszéspontja P, A_0B_0 és B_1C_1 metszéspontja Q, B_1C_1 és A_2C_2 metszéspontja R (12. ábra). Legyen továbbá P vetülete az AB, AC egyenesen P_0 és P_1. PP_0BB_0 téglalap, tehát $PP_0 = BB_0 = \lambda \cdot AB$. Ugyanígy $PP_1 = \lambda \cdot AC$, tehát $PP_0 : PP_1 = AB : AC$. A 23. tétel szerint tehát P rajta van az ABC háromszög t_a szimmediánján, vagyis PA egybeesik t_a-val. Hasonlóan QB a t_b, RC pedig a t_c szimmedián, s mivel az ABC háromszög a PQR háromszög nagyított (kicsinyített) képe, ez a három egyenes egy pontban, a hasonlósági centrumban metszi egymást. (Ezzel újabb bizonyítást is adtunk arra, hogy a három szimmedián egy pontban metszi egymást.) A hasonlóság centruma tehát valóban az L pont.

*

24. feladat. Igazoljuk, hogy a PQR háromszögből az ABC háromszög

$$\lambda + \frac{1}{2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)}$$

arányú kicsinyítéssel (nyújtással) jön létre!

25. feladat. Igazoljuk, hogy minden, az ABC háromszögből L középű nyújtással vagy kicsinyítéssel keletkező háromszög megkapható a 27. tétel eljárásával!

*

Befejezésül az L pontnak két további tulajdonságát mutatjuk be. Az első egy szélsőérték problémával kapcsolatos. Legyen X az ABC háromszög síkjának tetszőleges pontja, legyen X távolsága a BC, CA, AB oldalaktól rendre x, y, z. Nyilvánvaló, hogy $x + y + z$ akármilyen nagy negatív értéket felvehet, viszont $|x| + |y| + |z|$ a háromszögnek a leghosszabb oldallal szemközti csúcsában minimális.

*

26. feladat. Igazoljuk ezeket az állításokat!

*

Nehezebb feladat annak az X pontnak a meghatározása, amelyre $x^2 + y^2 + z^2$ minimális.

28. tétel. *Ha az X pont távolsága az ABC háromszög három oldalától x, y, z, akkor*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{4t^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $X = L$.

A bizonyításhoz gondoljuk meg, hogy $ax + by + cz = 2t$ (a távolságok előjelesek, ezért ez a sík minden X pontjára igaz). Másrészt

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 +$$
$$+ (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 (\geq ax + by + cz)^2 = 4t^2.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $ay = bx$, $az = cx$, $bz = cy$, azaz $x : y : z = a : b : c$, tehát X a Lemoine–Grebe-pont.

*

Hasonló ötlettel oldható meg az alábbi feladat:

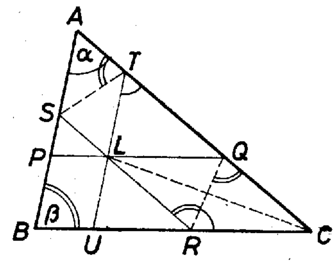
27. feladat. A BC oldalegyenes tetszőleges X pontjának távolsága az AB és az AC oldalaktól y és z. Igazoljuk, hogy $y^2 + z^2$ arra a pontra minimális, amelyben a t_a szimmedián metszi a BC oldalt.

*

Megjegyezzük, hogy sok az x, y, z távolságokkal kapcsolatos érdekes egyenlőtlenség található *Sklarszkij-Csencov-Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 2/2. Geometriai egyenlőtlenségek és szélsőértékek.* 107–117. feladatai között.

Kanyarodjunk vissza a 16. tételhez. Ott beláttuk, hogy az L ponton keresztül húzott három antiparalel az oldalakból egy kör hat pontját metszi ki. Belátjuk, hogy ugyanez a párhuzamosokra is igaz:

29. tétel. *Az a hat pont, amit az L ponton keresztül az oldalakkal húzott párhuzamosak metszenek ki a másik két oldalból, egy körön van.*



13. ábra

Legyen a három párhuzamos a 13. ábra jelölésével PQ, RS és TU. Az $LQCR$ paralelogramma átlói felezik egymást, tehát CL felezi a QR szakaszt. A CL szimmediánról tudjuk, hogy felezi az AB oldallal antiparalel szakaszokat, így a Q-ból induló QR' antiparalelt is. Belátjuk, hogy $R = R'$. Ha ugyanis $R \neq R'$ volna, a QR és QR' szakaszok felezőpontjait összekötő szakasz párhuzamos volna RR'-vel, tehát BC-vel, és nem lehetne mindkét felezőpont a CL egyenesen. Ezért $R = R'$, és a QR szakasz antiparalel az AB oldallal. Hasonlóan TS antiparalel a BC oldallal. Ezért $CRQ\sphericalangle = CAB\sphericalangle = \alpha$ és $CQR\sphericalangle = \beta = ATS\sphericalangle$. Másrészt a párhuzamosságok miatt $QTU\sphericalangle = \alpha$ és $SRQ\sphericalangle = RQC\sphericalangle = \beta$.

Azt kaptuk, hogy a $TQRS$ négyszög R-nél fekvő szöge egyenlő a T-nél fekvő külső szöggel, valamint hogy a $TURQ$ négyszög T-nél fekvő belső szöge egyenlő az R-nél levő külső szögével. Ezért mindkét négyszög húrnégyszög, vagyis a QRT háromszög köré írt körön rajta van S is, U is. Ugyanezért az URQ háromszög köré írt körön (amely ugyanez a kör) rajta van a P pont is, a hat pont tehát valóban egy körön van.

*

28. feladat. Igazoljuk, hogy a QRL és az ABC háromszögek hasonlók.

29. feladat. Igazoljuk, hogy a t_a szimmedián a BC oldalt $b^2 : c^2$ arányban osztja.

30. feladat. Igazoljuk, hogy $UR : RC : BU = a^2 : b^2 : c^2$.

31. feladat. Legyen az ABC háromszög A csúcsából induló magasságának talppontja T, a B-ből induló magasságáé U. Igazoljuk, hogy a C-ből induló súlyvonal a TU szakaszt $a^2 : b^2$ arányban osztja.

32. feladat. Az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van. A C-ből induló magasság F felezőpontját tükrözzük az A-ból induló belső szögfelezőre. A kapott F' pontot összekötjük A-val. Igazoljuk, hogy az AF' egyenes felezi a BC szakaszt!

33. feladat. Igazoljuk, hogy az ABC háromszög Lemoine–Grebe-féle pontjának talpponti háromszögében az oldalak úgy aránylanak egymáshoz, mint az ABC háromszög súlyvonalai!

*

Ha visszapillantva áttekintjük az egy csúcsból, pl. A-ból induló transzverzálisokat, azt találjuk, hogy az AB oldalegyenes, az m_a magasság egyenese, a t_a szimmedián, az f_α szögfelező, az s_a súlyvonal, a köré írt K közepét A-val összekötő $r_a(= AK)$ sugár egyenese és végül az AC oldal hét olyan egyenes, amelyek ebben a sorrendben *tükrösen helyezkednek el a szögfelezőre* (az első az utolsónak tükörképe stb.). Az oldalakhoz tartozó „nevezetes pontok" a háromszög csúcsai; a magasságok metszéspontja az M magasságpont; a szimmediánoké az L Lemoine-pont; a szögfelezőké a beírt kör O közepe; a súlyvonalaké az S súlypont; a sugaraké a körülírt kör K közepe. Látjuk tehát, hogy L természetesen illeszkedik bele az M, O, S, K nevezetes pontok közé ötödikként, s „szimmetrikussá" teszi azokat.

A Lemoine–Grebe-pontnak valóban számos szép tulajdonságát sikerült felfedeznünk. Ezeket most mind összefoglaljuk.

A magasságok felezőpontját a szemközti oldal felezőpontjával összekötő három szakasz egy L pontban találkozik (12. tétel).

Egyetlen olyan L pont van az ABC háromszög síkjában, amely egyszerre közepe a három oldal fölé írt egy-egy téglalapnak. A sík bármely más pontja legföljebb egy oldal fölé írt téglalapnak lehet középpontja (14. tétel).

Egyetlen olyan L pont van ABC síkjában, amely felezi mindhárom, rajta átmenő antiparalel szakaszt. E három szakasz egyenlő hosszú, s végpontjai egy L közepű körön vannak. Bármely két szakasz négy végpontja valamelyik oldal fölé írt téglalapot alkot (16. tétel).

Az ABC háromszög síkjában pontosan egy olyan L pont van, amely súlypontja a saját talpponti háromszögének (17. tétel).

Ha az ABC háromszögbe beírt PQR háromszög oldalainak négyzetösszege minimális, akkor a PQR háromszög egy L pont talpponti háromszöge (20. tétel).

A háromszög szimmediánjai egy L pontban találkoznak (22. tétel).

Az ABC háromszög síkjának egyetlen olyan L pontja van, amelynek a BC, CA, AB oldalaktól vett távolsága $BC : CA : AB$ arányú (24. tétel).

Legyen az X pont előjeles távolsága a három oldaltól x, y, z. Az $x^2+y^2+z^2$ négyzetösszeg a sík egyetlen L pontjára minimális, $x^2+y^2+z^2 \geq 4t^2/(a^2+b^2+c^2)$, és egyenlőség csak erre az L pontra áll (28. tétel).

Ha az ABC háromszög oldalaira egymással hasonló (és azonos) körüljárású ABB_0A_0, BCC_1B_1, CAA_2C_2 téglalapokat írunk, akkor a B_0A_0, C_1B_1, A_2C_2 egyenesek által alkotott háromszög (mely hasonló az ABC háromszöghöz) az ABC háromszögnek mindig ugyanabból az L pontból nagyított (kicsinyített) képe (27. tétel).

E kilenc tulajdonság bármelyike ugyanezt a pontot, a háromszög Lemoine–Grebe-féle pontját definiálja. Ennek a pontnak további nevezetes tulajdonságai:

L-en keresztül a három oldallal húzott párhuzamos az oldalakat hat pontban metszi, ez a hat pont egy körön van (29. tétel).

Ha az ABC nem derékszögű háromszög, akkor van olyan PQR háromszög, amelynek beírt vagy valamelyik hozzáírt köre a QR, RP, PQ oldalakat rendre A, B, C-ben metszi. A PQR háromszög Gergonne-pontja az ABC háromszög Lemoine-pontja (25. tétel).

Ha az ABC háromszög hegyesszögű, akkor Lemoine-pontja megegyezik a magasság talpponti háromszögének középvonalháromszögében a Gergonne-ponttal. Ha ennek a középvonalháromszögnek a beírt köre az oldalait A', B', C' pontokban metszi, akkor az $A'B'C'$ háromszög Lemoine–Grebe-pontja azonos az ABC háromszög Lemoine–Grebe-pontjával, s az $A'B'C'$ háromszög egy L középpontú, tükrözve kicsinyítéssel kapható az ABC háromszögből (26. tétel).