A bináris (2-es számrendszerbeli) számláláskor úgy növelünk 1-gyel, hogy jobbról indulva az 1-eseket 0-ra váltjuk egészen addig, amíg 0-hoz nem érünk, amit átírunk 1-esre. Pl.

$$10111 + 1 = 11\ 000, \quad 101 + 1 = 110, \quad 10 + 1 = 11.$$

Kezdjük a számlálást 0-tól és minden szám mellé írjuk fel, hogy hátulról számítva hányadik értéken cseréltünk 0-t 1-esre (a_n), illetve azt, hogy ez a helyi érték 2 hányadik hatványát jelöli (b_n):

n	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	$\dots$
a_n		1	2	1	3	1	2	1	4	
b_n		0	1	0	2	0	1	0	3	

Látható, hogy a b_n sorozat elemei 1-gyel kisebbek, mint az a_n-ek. Az a_n sorozat képzési szabályát így fogalmazhatjuk meg:

az első elemtől kezdve minden második 1*-es,*
a második elemtől kezdve minden negyedik 2*-es,*
a negyedik elemtől kezdve, minden nyolcadik 3*-as,*

$$\vdots$$

a 2^k*-adik elemtől kezdve minden* 2^{k+1}*-edik* $(k+1)$*-es.*

A b_n sorozatnál tehát a 2^k-adik elemtől kezdve minden 2^{k+l}-edik k-as.

A hatványok sorozata egyúttal azt az információt is megadja, hogy n kettes számrendszerbeli alakja hány 0-ra végződik. Ez oszthatóságra átfogalmazva azzal egyenértékű, hogy $2^{b_n} | n$, de $2^{b_n+1} \nmid n$; Ezt úgy mondják, hogy 2^{b_n} *pontos osztója* n-nek és így jelölik: $2^{b_n} \parallel n$; (Ezzel analóg a 10-es számrendszerben az, hogy egy számnak 10 annyiadik hatványa a pontos osztója, ahány nullára végződik a szám.)

Ha $2^a \parallel n$ és $2^b \parallel m$, akkor $2^{a+b} \parallel n \cdot m$ (gondoljunk arra, hogy hány 0-ra végződik n, m és $n \cdot m$). Ebből a b_n sorozat egy érdekes tulajdonsága adódik:

$$b_{n \cdot m} = b_n + b_m.$$

Ezt a tulajdonságot additivitásnak nevezik. Ilyen tulajdonságú pl. a logaritmus függvény is:

$$\lg(n \cdot m) = \lg n + \lg m.$$

Az 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, … sorozatnak sok érdekes tulajdonsága van.

Előfordulhat, hogy végtelen sok sorozatot akarunk „összefésülni”, azaz az elemeket egy sorozatba egyesíteni. Jelöljük az elemeket $x_{i,j}$-vel, ahol az első index arra utal, hogy hányadik sorozatban van az elem, a második pedig arra, hogy ezen belül hányadik helyen; $x_{i,j}$ az i-edik sorozat j-edik eleme.

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_{1,1} & & x_{1,2} & \to & x_{1,3} & & x_{1,4} & \to & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
x_{2,1} & & x_{2,2} & & x_{2,3} & & x_{2,4} & & \dots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
x_{3,1} & & x_{3,2} & & x_{3,3} & & x_{3,4} & & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
x_{4,1} & & x_{4,2} & & x_{4,3} & & x_{4,4} & & \dots \\
\vdots & \swarrow & & & & & & &
\end{array}$$

Az

$$x_{1,1}, \quad x_{2,1}, \quad x_{1,2}, \quad x_{1,3}, \quad x_{2,2}, \quad x_{3,1}, \quad x_{4,1}, \quad \dots$$

fölsorolást *háromszögszerűnek* nevezhetnénk, az

$$x_{1,1}, \quad x_{2,1}, \quad x_{2,2}, \quad x_{1,2}, \quad x_{1,3}, \quad x_{2,3}, \quad x_{3,3}, \quad x_{3,2}, \quad x_{3,1}, \quad \dots$$

fölsorolást *négyszögszerűnek.*

$$
\begin{tikzcd}
x_{1,1} \arrow[d] & x_{1,2} \arrow[r] & x_{1,3} \arrow[d] & x_{1,4} \arrow[r] & \dots \\
x_{2,1} \arrow[r] & x_{2,2} \arrow[u] & x_{2,3} \arrow[d] & x_{2,4} \arrow[u] & \dots \\
x_{3,1} \arrow[d] & x_{3,2} \arrow[l] & x_{3,3} \arrow[l] & x_{3,4} \arrow[u] & \dots \\
x_{4,1} \arrow[r] & x_{4,2} \arrow[r] & x_{4,3} \arrow[r] & x_{4,4} \arrow[u] & \dots \\
\vdots & & & &
\end{tikzcd}
$$

Azt a felsorolást pedig, amelynek n-edik tagja az a_n-edik sor legkisebb, a felsorolásban még nem szereplő tagja, nevezhetjük például *logaritmikusnak:*

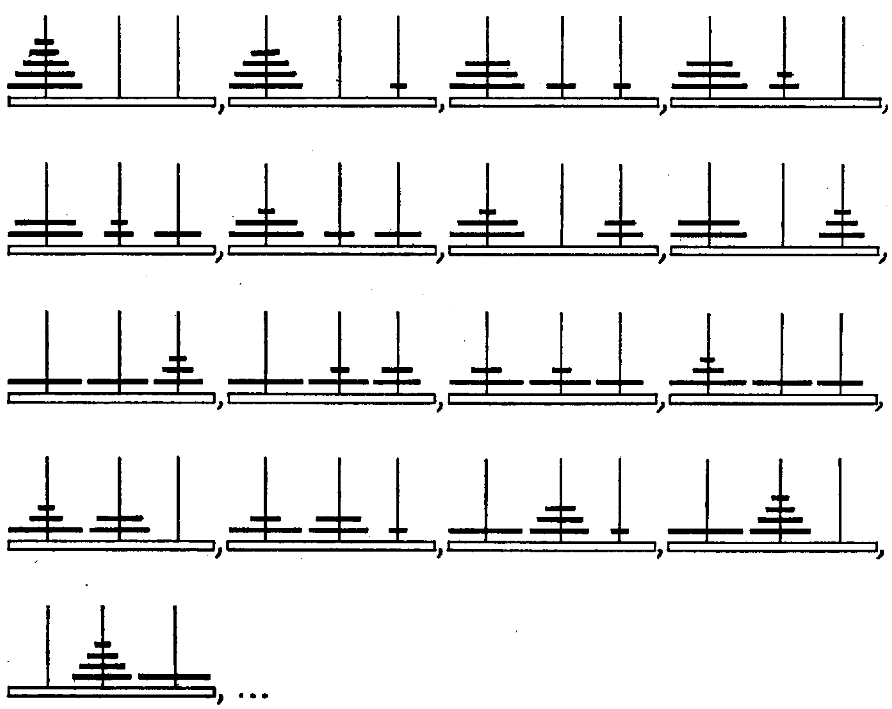
$$x_{1,1}, \quad x_{2,1}, \quad x_{1,2}, \quad x_{3,1}, \quad x_{1,3}, \quad x_{2,2}, \quad x_{1,4}, \quad x_{4,1}, \quad \dots$$

Egy másik érdekes tulajdonsága a sorozatunknak, hogy kapcsolatba hozható a *Hanoi tornyai* néven ismert játékkal, amely a következő. Egy rúdon egyre kisebbedő korongok vannak. Úgy kell a korongokat egy másik rúd segítségével egyesével egy harmadikra átrakni, hogy egyszer se kerüljön kisebb korongra nagyobb. A megoldások közül természetesen a lehető legrövidebb érdekel minket. Ezt legkönnyebben rekurzióval lehet elmondani. Egy korong esetén világos, hogy mi a teendő, $n \geq 2$ korong esetén $(n-1)$-et áthelyezünk a második rúdra, az n-ediket a harmadik rúdra, majd az $(n-1)$-et a második rúdról átrakjuk a harmadikra.

Ebből két dolgot láthatunk:

1. n korong áthelyezéséhez $2^n - 1$ lépés elegendő;
2. páratlan számú koronggal indulva elsőként a harmadik rúdra, páros számú koronggal indulva elsőként a második rúdra kell tennünk.

A rekurziót és a két állítást az alábbi ábra illusztrálja $n = 5$ korong esetén. A korongokat felülről lefelé számozzuk meg. Ha fölírjuk, hogy hányadik korongot mozgatjuk, akkor újra az a_n sorozatot kapjuk: 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, ...



Rendeljük hozzá a korongokhoz a megfelelő (bináris) helyiértéket, a lépésszámhoz annak bináris alakját. Az alábbi táblázat az ábra alapján készült, a felső ötjegyű szám a lépésszámot mutatja kettes számrendszerben (megfelelő számú nullát eléírva), alatta pedig az egyes helyiértékeken aszerint áll 1, 2 vagy 3, hogy az ötödik, negyedik stb. korong melyik oszlopon áll.

Lépésszám	00000	00001	00010	00011	00100	00101	00110	00111
Korongok	11111	11113	11123	11122	11322	11321	11331	11333

Lépésszám	01000	01001	01010	01011	01100	01101	01110	01111
Korongok	12333	12332	12312	12311	12211	12213	12223	12222

Megfigyelhetjük, hogy ha az egymás alatt levő ötjegyű számokat egyforma számjegyekből álló blokkokra bontjuk, azok határai egybeesnek; továbbá ha egy, a korongok elhelyezkedését leíró számot veszünk ki, ott egy blokkot átölelő blokkban egyforma számjegyek állnak, ha középen páros sok jegy van (pl. amikor a lépésszám 01100, a „22"-es blokkot „1", illetve „11" blokk veszi körül); és ezek a számjegyek különbözők, ha a blokkban páratlan sok számjegy van.

Ezek a törvényszerűségek nemcsak itt, hanem általában is igazak. Ahhoz tehát, hogy a lépésszámból meghatározhassuk, hol is helyezkednek el a korongok, mindössze az első két blokkról kell tudnunk, hogy 1, 2, 3 közül melyik áll benne.

Az első blokk csak 1-es és 3-as lehet – hiszen a legnagyobb korong más rúdra nem kerül: amíg a lépésszám bináris alakja 0-val kezdődik, addig az első, utána pedig a harmadik rúdon van. A második blokk pedig kettesekből áll, ha az első blokkban páratlan sok elem volt, egyébként pedig 3-as vagy 1-es.

Nem kell külön „kiokoskodnunk" ezeket a számokat, ha a következőket csináljuk:

1. felírjuk k bináris alakját n jegyűre kiegészítve, majd elé 011-et írunk;

2. a számban az első 0 alá 1-et, az ezt követő 1-esek alá 3-at írunk, egészen addig, míg a számban egy 0-hoz nem érünk;

3. ha egy egyező számjegyekből álló blokk alá már odaírtuk az 1, 2, 3 valamelyikét, akkor az ezután következő blokk jegyei alá aszerint kerül az a szám, amely a megelőző blokk előtt szerepelt vagy az 1, 2, 3 közül a harmadik, hogy az előző blokkban páros sok vagy páratlan sok számjegy van-e.

Így például ha 20 korongot teszünk át az elsőről a harmadik rúdra, ekkor a leírtak alapján $2^{20}-1 = 1\,048\,575$ lépés kell. A 275 419-edik lépésben a korongok elhelyezkedése

$$\begin{array}{cc|ccccc}
0 & 1\,1 & 0\,1\,0\,0\,0\,0 & 1\,1\,0\,0 & 1\,1\,1\,1\,0\,1\,1 & 0 & 1\,1 \\
1 & 3\,3 & 1\,2\,3\,3\,3\,3 & 2\,2\,3\,3 & 2\,2\,2\,2\,3\,1\,1 & 3 & 2\,2
\end{array}$$

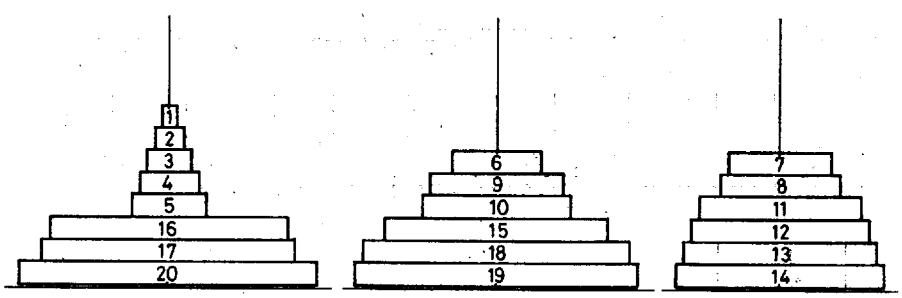
ugyanez a félmilliomodik lépésben ($500\,000 = 1111010000100100000_2$)

$$\begin{array}{c|c}
0\,1\,1 & 0\,1\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0 \\
1\,3\,3 & 1\,2\,2\,2\,2\,1\,3\,2\,2\,2\,2\,3\,1\,1\,3\,2\,2\,2\,2\,2
\end{array}$$

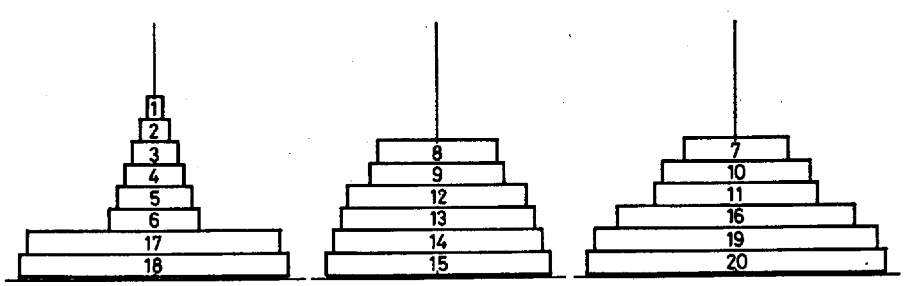
és az egymilliomodikban:

$$\begin{array}{c|c}
0\,1\,1 & 1\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
1\,3\,3 & 3\,3\,3\,3\,1\,2\,3\,3\,3\,3\,2\,1\,1\,2\,3\,3\,3\,3\,3\,3
\end{array}$$

Próbáljuk meghatározni, hogy az itt látható két ábra a 20 korong átrakásának hányadik lépéseit ábrázolja.



1. ábra



2. ábra

(*Megoldás*: a 154. oldal 1. ábráján a 410400. lépés, a második ábrán annak kétszerese látható.)