A sík *pontjai* egy parabola szempontjából három diszjunkt halmazba sorolhatók: azon pontok halmaza, amelyek a vezéregyeneshez közelebb vannak, mint a fókuszhoz; azon pontok halmaza, amelyek a vezéregyenestől és a fókusztól egyenlő távolságra vannak; azon pontok halmaza, amelyek a vezéregyenestől távolabb vannak, mint a fókusztól.

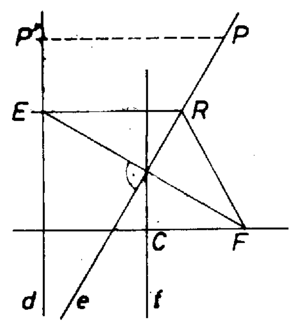
Olyan *egyenes*, amelynek minden pontja az első halmazba esik, létezik – pl. maga a vezéregyenes –, míg olyan egyenes, amelynek minden pontja a harmadik halmazba esik, nem létezik.

Hasonló három halmazba sorolás létezik a kör szempontjából is: azon pontok halmaza, amelyeknek a középponttól mért távolsága nagyobb a kör sugaránál, azon pontok halmaza, amelyeknek a középponttól mért távolsága egyenlő a kör sugarával, azon pontok halmaza, amelyeknek a középponttól mért távolsága kisebb a kör sugaránál. Itt is létezik olyan egyenes, amelynek minden pontja az első halmazba tartozik, de nem létezik olyan egyenes, amelynek minden pontja a harmadik halmazba tartozik. A körnél kézenfekvő, hogy az első halmazba tartozó pontokat külső, a harmadik halmazba tartozókat belső pontoknak hívjuk. Ezért a parabolánál is azokat a pontokat, amelyek a vezéregyeneshez közelebb vannak, mint a fókuszhoz, *külső,* míg azokat, amelyek a vezéregyenestől távolabb vannak, mint a fókusztól, *belső* pontoknak nevezzük. Vegyük még észre, hogy mind a körnél, mint a parabolánál a külső pontokból a görbe *domborúnak,* míg a belső pontokból *homorúnak* látszik.

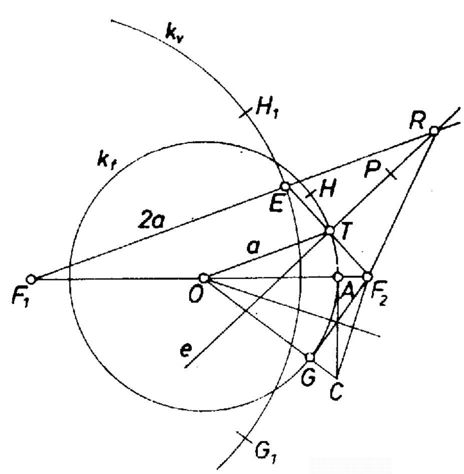
A hiperbolánál ugyanez a három halmaz: azon pontok halmaza, amelyekre a fókusztól mért távolságkülönbség abszolút értéke kisebb, mint $2a$, azon pontok halmaza, amelyekre a fókuszoktól mért távolságkülönbség abszolút értéke $2a$, azon pontok halmaza, amelyekre a fókuszoktól mért távolságkülönbség abszolút értéke nagyobb, mint $2a$. Itt is létezik olyan egyenes, amelynek minden pontja az első halmazba tartozik – pl. a melléktengely – és nem létezik olyan egyenes, amelynek minden pontja a harmadik halmazba tartozik. Itt is igaz, hogy az első halmaz pontjaiból a hiperbola *domborúnak*, míg a harmadik halmaz pontjaiból *homorúnak* látszik. Az ellipszisre vonatkozó ugyanilyen típusú megállapításokat az olvasóra bízom.

Ezek után célszerű a parabola, a hiperbola, az ellipszis érintőjét a kör érintőjéhez hasonlóan úgy definiálni, hogy olyan egyenesek, amelyeknek egy közös pontjuk van a görbével és minden más pontjuk külső pont.

A parabola definíciója átfogalmazható a következőképpen: a parabola azon körök középpontjainak halmaza, amely körök érintik a vezéregyenest és átmennek a fókuszon. A hiperbola és az ellipszis esetén tekintsük az F_1 középpontú $2a$ sugarú kört – ennek neve *vezérkör.* Hiperbola esetén a másik fókusz – F_2 – a vezérkörön kívül, ellipszis esetén a vezérkörön belül van és a két fókusz két különböző pont. A közös definíció: azon körök középpontjainak halmaza, amelyek a vezérkört érintik és átmennek a másik fókuszon.



7. ábra



8. ábra

Tetszőleges görbepont szerkesztését ezek alapján úgy végezzük el, hogy a vezérvonalon kijelölünk egy érintési pontot – legyen ez E, és keressük annak a körnek a középpontját, amelyik a vezérvonalat E-ben érinti és átmegy a fókuszon. Az

e egyenes a 7.–8. ábrákon olyan egyenes, amelynek R kivételével minden pontja külső pont. A parabolánál $RF = RE$ miatt minden R-től különböző P pontra a vezéregyenestől mért távolság (PP') kisebb a fókusztól mért távolságnál: $PP' < PE = PF$. A hiperbolánál $PF_2 = PE$, és így a PEF_1 háromszögben a PF_1, PE oldalak különbsége valóban kisebb $EF_1 = 2a$-nál. Tehát az e egyenes érintője a görbéknek.

Az érintő szerkesztéséből adódik, hogy a fókusznak az érintőre vonatkozó tengelyes tükörképe a vezérvonalon van, az érintő az F_1RF_2 háromszög belső szögfelezője a hiperbolánál, a parabolánál az ERF szög felezője; a fókuszból az érintőre állított merőleges talppontja a fővonalon van. Hiperbolánál és ellipszisnél általánosan elterjedt, hogy az O középpontú a sugarú kör neve főkör. A parabolánál csúcsérintő vagy tengelyponti érintő a szokásos elnevezés, melyet a hiperbola és ellipszis mintájára én főegyenesnek nevezek. Ez annál is inkább indokolt, mert mindhárom görbénél a fővonal a vezérvonalnak a fókuszra vonatkozó $1/2$ arányú középpontosan hasonló képe. (A 7. ábráról a parabola érintőjének két további közismert tulajdonsága is leolvasható: az érintő a főegyenesből fele akkora szakaszt vág le, mint az E érintési pont távolsága a tengelytől; az érintő a tengelyen ugyanakkora és ellentétes irányítású szakaszt vág le, mint az érintési pont távolsága a főegyenestől.

⋆

5. feladat. Igazoljuk, hogy a parabolának semelyik két érintője nem párhuzamos!

⋆

Érintőszerkesztés kúpszelethez

Ha kúpszelethez külső pontból érintőt akarunk szerkeszteni, akkor az érintő és a fővonal metszéspontjai szerkeszthetők, mert ezek a pontok a fővonalon kívül rajta vannak a külső pont – fókusz szakasz Thalész-körén. Így tehát egy pontból legfeljebb két érintő szerkeszthető.

Abból, hogy a fókusznak bármely érintőre vonatkozó tengelyes tükörképe a vezérvonalon van, következik parabolánál, hogy a vezéregyenesnek bármely érintőre vonatkozó tengelyes tükörképe átmegy a fókuszon. Kapcsoljuk ezt a tényt 6.–9. TÉTELeinkhez:

12. TÉTEL. *A parabola bármely három érintője által meghatározott háromszög magasságpontja rajta van a vezéregyenesen.*

13. TÉTEL. *A parabola bármely három érintője által meghatározott háromszög körülírt körén rajta van a fókusz.*

⋆

6. feladat. Szerkesszük meg a parabola vezéregyenesét és fókuszát, ha adott a parabola négy érintője!

7. feladat. Egy parabola két érintője akkor és csakis akkor merőleges egymásra, ha az érintési pontokat összekötő egyenes átmegy a fókuszon, és a két érintő metszéspontja rajta van a vezéregyenesen.

⋆

Egyenes és kúpszelet közös pontjainak meghatározása.

Legyen adott a vezérvonal, a fókusz és egy g egyenes. Keressük a kúpszelet és g közös pontjait. Vagyis keressük azoknak a köröknek a középpontjait, amely körök érintik a vezérvonalat, átmennek a fókuszon és a középpontjuk rajta van a g egyenesen. Így a g egyenes a keresett körök átmérőegyenese, tehát ha átmegy a kör a fókuszon, akkor átmegy a fókusznak g-re vonatkozó tengelyes tükörképén is. Feladatunk tehát parabolánál: szerkesztendő kör, amelyik átmegy két adott ponton és érint egy adott egyenest. Hiperbolánál és ellipszisnél: szerkesztendő kör, amelyik átmegy két adott ponton és érint egy adott kört.

Ha a fókusz tükörképe éppen a vezérvonalra esik, akkor a g egyenes éppen érintő és az érintési pont szerkesztése az ábráról leolvasható. Ha a vezérvonal elválasztja egymástól a fókuszt és annak g-re vonatkozó tengelyes tükörképét, akkor nyilván nincs olyan kör, tehát a g egyenesnek minden pontja külső pont. Ha a fókusz és a g-re vonatkozó tengelyes tükörképe a vezérvonal ugyanazon partjára esik, akkor két ilyen kör van, így a g egyenesnek a kúpszelettel két metszéspontja van.

Parabola esetén jelöljük F-nek g-re vonatkozó tengelyes tükörképét G-vel, továbbá az FG egyenes és a vezéregyenes metszéspontját M-mel. Ekkor MG és MF mértani közepe szerkeszthető, a vezéregyenesen M-től mértani középtávolságra levő pontok legyenek M_1 és M_2 $\cdot$ M_1-ben, ill. M_2-ben a vezéregyenesre állított merőlegeseknek g-vel való metszéspontjai legyenek R_1 és R_2. Ezek éppen g és a parabola közös pontjai.

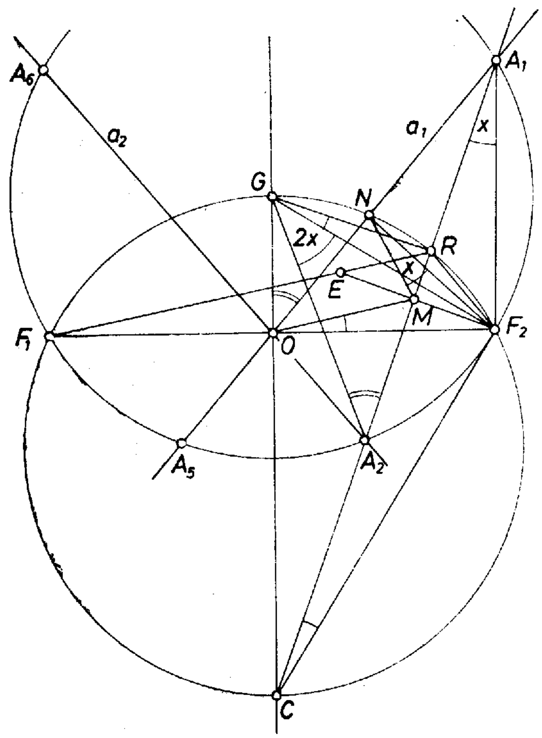
⋆

A parabolának nyilván nincs konvex burka, tehát a parabolához kell ideális pontot rendelni. Mármost, ha az FG egyenes és a d vezéregyenes M metszéspontja létezik, vagyis FG nem párhuzamos d-vel, akkor az egyenesnek vagy minden pontja külső pont, vagy érintő, vagy szelő két metszésponttal. Ha viszont FG párhuzamos d-vel, vagyis a g egyenes a parabola tengelyével párhuzamos, akkor egy közös pont biztosan van; ettől g-n a vezéregyenestől távolodva, a félegyenes minden pontja a fókuszhoz van közelebb, tehát belső pont. Így kézenfekvő, hogy a tengely ideális pontját csatoljuk a parabolához. Az ideális egyenes most a parabola érintője lesz, mert a tengely ideális pontja görbepont, az összes többi pontja a parabola szempontjából külső pont, hiszen minden egyenesen egy helytől kezdve minden pont d-hez van közelebb.

⋆

Térjünk vissza most a hiperbolához. A 8. ábra mutatja egy hiperbolapont és a hozzá tartozó érintő megszerkesztését. Legyenek most F_2-ből a vezérkörhöz húzható érintők érintési pontjai G_1 és H_1. F_2G_1, ill. F_2H_1 felező merőlegese párhuzamos F_1G_1-gyel, ill. F_1H_1-gyel. E felező merőlegesek átmennek a hiperbola O középpontján, és F_2G_1 és F_2H_1 a főkörnek is érintői; az érintési pontok legyenek G, ill H. Az OG és OH egyenesek minden közönséges pontja külső pont, hiszen ha K ezen egyenesek egyikének pontja, akkor az F_1G_1K háromszögben két oldal különbsége kisebb, mint $F_1G_1 = 2a$. F_2-nek ezen egyenesekre vonatkozó tengelyes tükörképei a vezérkörön vannak, ezért OG és OH a hiperbola két ideális pontjához tartozó érintő, a hiperbola két aszimptotája. Az OGF_2 háromszöget a GOF_2 szög felezőjére tükrözve OAC háromszöget kapjuk, A a hiperbola egyik tengelypontja, $AC = b$; $OC = OF_2 = OF_1 = c$.

Legyen most adva F_1, F_2 és a két aszimptota – ezek egymás tengelyes tükörképei F_1F_2-re vonatkozóan.



9. ábra

A 9. ábrán F_1F_2 felező merőlegesén tetszőlegesen felvéve a G pontot és megrajzolva a G középpontú $GF_1 = GF_2$ sugarú kört; ez az a_1 egyenest A_1 és A_5; az a_2 egyenest A_2 és A_6 pontokban metszi. Az A_1A_2 és OG metszéspontja C; A_1A_2 felezőpontja R. 14. TÉTEL. Az *A_1A_2 egyenes az F_1RF_2 szög felezője.*

Bizonyítás. Az állítás igazolására elég belátni, hogy F_1RF_2C húrnégyszög. G rajta van A_1OA_2 körülírt körén, mert G e háromszög külső szögfelezőjének és A_1A_2 felező merőlegesének metszéspontja. C e két kör hatványvonalának pontja, tehát C-ből a G középpontú körhöz húzható érintő hossza CO és CG mértani közepe; és ezért CG átfogója annak a derékszögű háromszögnek, amelynek egyik befogója az érintő, és ennek CG-re eső vetülete CO. Így CG Thalész-köre F_1 és F_2 pontokban metszi az F_1F_2 egyenest. Ezen a Thalész-körön R is rajta van, mert $GRC\sphericalangle = 90°$. 15. TÉTEL. *R pontja annak a hiperbolának, amelynek a fókuszai F_1, F_2, aszimptotái a_1, a_2, és így valós féltengelye $ON = a$, ahol N az F_2 fókusz vetülete az a_1 aszimptotán.*

Bizonyítás. A 9. ábrán F_2-nek az A_1A_2 egyenesre vonatkozó tengelyes tükörképe E, F_2E és A_1A_2 metszéspontja M, ezért OM párhuzamos F_1R-rel, és $2OM = F_1E$. Az állítás igazolására be kell látni, hogy $OM = a$.

Ha megmutatjuk, hogy $NOM\sphericalangle = 2x$ $\ (x = MNF_2\sphericalangle)$, akkor készen vagyunk, mert $ONF_2\sphericalangle = 90°$, így x szög érintő szárú kerületi szög, hiszen a $2x$ szög ekkor középponti szög.

A_1F_2 Thalész-körén rajta van az N és az M pont, így $MA_1F_2\sphericalangle = A_2A_1F_2\sphericalangle = = x$; de $A_2GF_2\sphericalangle = 2x$, mert az A_2F_2-höz tartozó középponti szög.

CF_2 Thalész-körén van O és M, így $MOF_2\sphericalangle = MCF_2\sphericalangle = RCF_2\sphericalangle = = RGF_2\sphericalangle$. Tekintve, hogy A_2OGA_1 húrnégyszög, $GA_2A_1\sphericalangle = GOA_1\sphericalangle$.

A GRA_2 derékszögű háromszögben $RGF_2\sphericalangle + GA_2R\sphericalangle + 2x = 90°$. Az O-nál levő derékszögből a két három betűs szög megegyezik, így $NOM\sphericalangle = 2x$. 16. TÉTEL. *A hiperbola érintőjének az aszimptoták közti szakaszát az érintési pont felezi.*

A_1A_2-ről beláttuk, hogy a hiperbola R pontbeli érintője, mert az F_1RF_2 szög felezője. 17. TÉTEL. *A hiperbola* *bármely szelőjén az aszimptoták közti szakasz felezőpontja egyben a szelőre eső húr felezőpontja.*

A hiperbolánál és ellipszisnél a párhuzamos húrok felezőpontjai egy, a középponton átmenő egyenesen vannak.

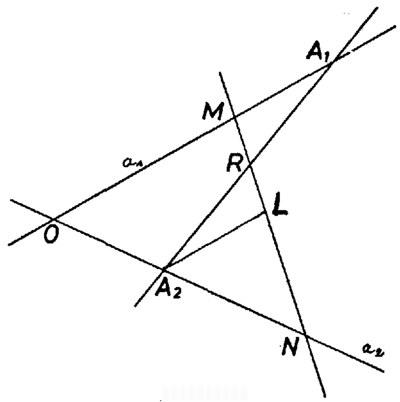
Így az A_1A_2-vel párhuzamos húrok felezőpontjai az OR egyenesre esnek. Ez súlyvonala azon háromszögeknek, amelyeknek két oldala a két aszimptota, harmadik oldala pedig párhuzamos A_1A_2-vel.

Ezzel az állítást arra az esetre igazoltuk, amikor a szelő az egyik ág szelője.

18. TÉTEL. *Az A_1OA_2 háromszög területe állandó – tehát nem függ attól, hogy az F_1 és F_2-n átmenő körök közül melyiket rajzoltuk meg.*

$$t = \frac{1}{2}OA_1 \cdot \ OA_2 \sin 2u = OA_1 \cdot OA_2 \ \sin u \ \cos u = c^2 \sin u \cos u = ab,$$

ahol $u = F_2OA_1\sphericalangle$. 19. TÉTEL. *Az A_1OA_2 háromszög a minimális területű mindazon háromszögek között, amelynek két oldalegyenesé a_1 és a_2, a harmadik oldal pedig átmegy az R ponton.*



10. ábra

A 10. ábrán tekintsük az OMN háromszöget. Legyen M-nek R-re vonatkozó középpontos tükörképe L, ekkor az OMN háromszög területe az A_2LN háromszög területével nagyobb az OA_1A_2 háromszög területénél.

20. TÉTEL. *Az R pontnak az aszimptotáktól mért távolságainak a szorzata állandó.*

Jelöljük R távolságát a_1-től r_1-gyel, a_2-től r_2-vel. OR mint súlyvonal felezi az OA_1A_2 háromszög területét:

$$OA_1 \cdot r_1 = ab; \qquad OA_2 \cdot r_2 = ab;$$

tehát

$$OA_1 \cdot OA_2 \cdot r_1 \cdot r_2 = a^2b^2.$$

De

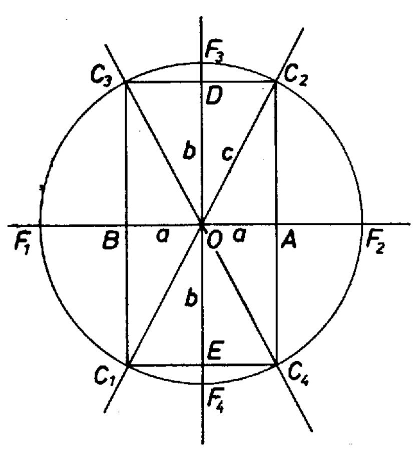
$$OA_1 \cdot OA_2 = OA_1 \cdot OA_5 = c^2,$$

így

$$r_1 \cdot r_1 = \frac{a^2b^2}{c^2}.$$

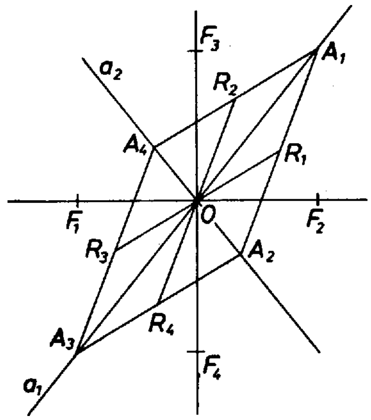
⋆

A 11. ábrán két, közös aszimptotájú hiperbola fókuszai és tengelyei láthatók úgy, hogy a két-két fókusz távolsága ugyanaz. A két aszimptota a téglalapot 4, egyenként ab területű háromszögre bontotta.



11. ábra

Tekintsük azokat a pontokat, amelyeken át húzható egyenesekkel minimális ab területű háromszögek alakíthatók ki a két aszimptotával mint oldallal. Az előbbiek alapján két ilyen hiperbolát kapunk. Az egyiknek F_1 és F_2 lesz a két fókusza, A és B a két tengelypontja; a másiknak F_3 és F_4 a két fókusza, D és E a két tengelypontja. E két hiperbolát egymáshoz képest konjugáltnak nevezzük.



12. ábra

A 12. ábrán az A_1OA_2 és az A_1OA_4 terület egyenlő, így R_2 a konjugált hiperbola egy pontja: OR_1 és OR_2 két konjugált félátmérő.

⋆

Apollonius tételei: A konjugált félátmérők által kifeszített paralelogramma területe állandó. $OR_1A_1R_2$ területe egyenlő az A_1OA_2 területtel.

A konjugált félátmérők négyzetének különbsége konstans.

$$\overrightarrow{OR}_1 + \overrightarrow{OR}_2 = \overrightarrow{OA}_1; \qquad \overrightarrow{OR}_1 + \overrightarrow{OR}_4 = \overrightarrow{OR}_1 - \overrightarrow{OR}_2 = \overrightarrow{OA}_2.$$

A két vektoregyenlet skaláris szorzata:

$$\overrightarrow{OR}_1^2 - \overrightarrow{OR}_2^2 = \overrightarrow{OA}_1 \cdot \overrightarrow{OA}_2 = c^2 \cos 2u = c^2(\cos^2 u - \sin^2 u) = a^2 - b^2.$$

⋆

Hátra van még a 17. TÉTEL igazolása arra az esetre, amikor a szelő egyik metszéspontja az egyik ágon, másik metszéspontja a másik ágon van. Tekintsük ekkor az A_1A_4 egyenessel párhuzamos szelőket, ezeknek a felezőpontjai az OR_2 egyenesen lesznek (12. ábra). Az OR_2 egyenes azonban súlyvonala mindazon háromszögeknek, amelyeknek két oldalegyenese a két aszimptota, harmadik oldala pedig párhuzamos A_1A_4-gyel.

⋆

A bebizonyított állításokból következik, hogy a hiperbolára a szokásos – fokális – definíciója helyett adhatók vele ekvivalens más definíciók is:

Adott egy $2a$, $2b$ oldalú téglalap és az átlók egyik szögfelezője. A hiperbola azon pontok halmaza abban a két szögtartományban, amelyiket a szögfelező felez, amely pontokon át húzott egyenesek az átlókkal minimális ab területű háromszögeket határoznak meg.

A hiperbola azon pontok halmaza abban a két szögtartományban, amelyet a szögfelező felez, amelyeknek a két átlótól való távolságának szorzata $\dfrac{a^2b^2}{c^2}$, ahol c a téglalap félátlójának hossza.