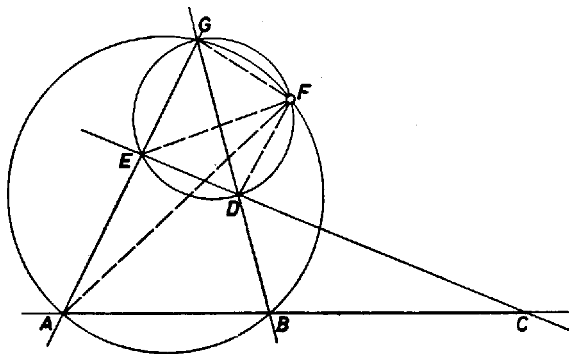
I. rész

Néhány bevezető tétel

1. TÉTEL. *Ha van négy egyenes, amely négy háromszöget alkot, akkor a háromszögek körülírt köreinek van közös pontja.*



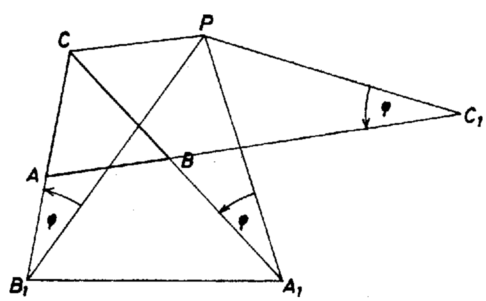
1. ábra

Bizonyítás. Az 1. ábra 4 egyenese az ABG, EDG, AEC, BDC háromszögeket határozza meg. Először megrajzoltuk az ABG és DEG háromszögek körülírt köreit. E két körnek G közös pontja. Ha G volna az egyetlen közös pont, akkor a két kör egymást G-ben érintené, így G lenne e két kör külső hasonlósági pontja, tehát ED és AB párhuzamos lenne, ellentétben a feltétellel. Így a két körnek G-n kívül van még egy közös pontja, F.

Megmutatjuk, hogy F rajta van az AEC és BDC háromszögek körülírt körén is: $FEC\sphericalangle = FED\sphericalangle = FGD\sphericalangle = FGB\sphericalangle = FAB\sphericalangle = FAC\sphericalangle$. Így A rajta van FC szakasz FEC szögű látókörén. FDC szög az $FGED$ húrnégyszög külső szöge, FBC szög pedig az $FGAB$ húrnégyszög külső szöge, tehát $FGE\sphericalangle = FGA\sphericalangle = FDC\sphericalangle = FBC\sphericalangle$; így D és B rajta van az FC szakasz FGE szögű látókörén.

⋆

Adott az ABC háromszög és síkjában a P pont. Legyen A_1 a BC, B_1 az AC, C_1 az AB egyenesnek az a pontja, amelyre $PB_1C\sphericalangle = PA_1C\sphericalangle = PC_1A\sphericalangle = \varphi$ (2. ábra).



2. ábra

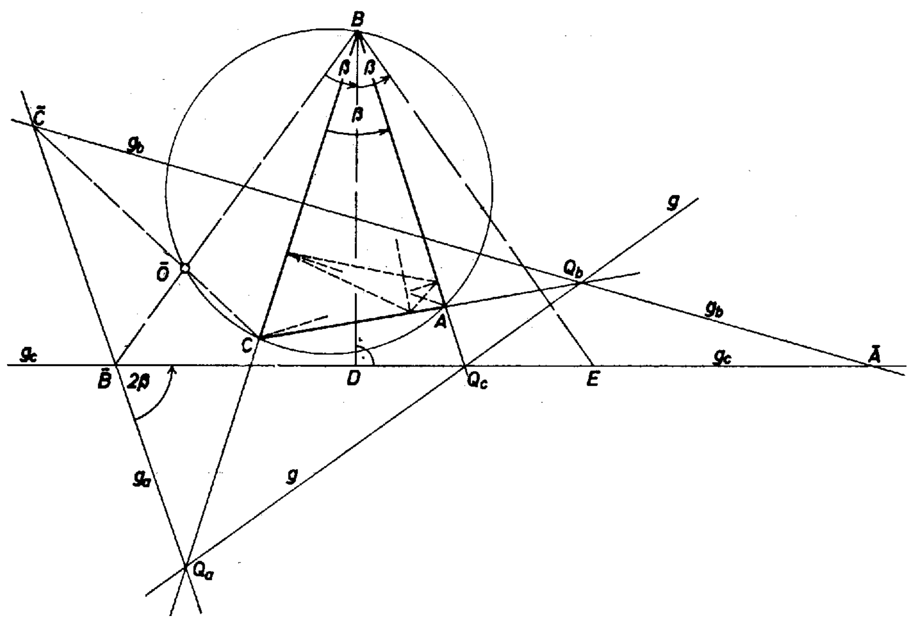
2. TÉTEL. *A B_1, C_1, A_1 pontok akkor és csakis akkor kollineárisak, ha P rajta van ABC háromszög körülírt körén.*

Bizonyítás. A feltétel miatt PCB_1A_1 és PBA_1C_1 is húrnégyszög. Ezért $B_1CP\sphericalangle + PA_1B_1\sphericalangle = 180°$; $PA_1C_1\sphericalangle = PBC_1\sphericalangle$. Ha $B_1A_1C_1\sphericalangle = 180°$, akkor

$PCA\sphericalangle = PA_1C_1\sphericalangle = PBC_1\sphericalangle$, tehát $PCAB$ húrnégyszög. – Ha viszont $PCAB$ húrnégyszög, akkor $PCB_1\sphericalangle = PBC_1\sphericalangle = PA_1C_1\sphericalangle$, tehát $PA_1B_1\sphericalangle + C_1A_1P\sphericalangle = 180°$, tehát B_1, A_1, C_1 kollineáris.

⋆

A 3. ábrán egy tetszőleges ABC hegyesszögű háromszög látható és egy ugyancsak tetszőleges g egyenes, amelyik a háromszög mindhárom oldalegyenesét metszi. A g egyenesnek a BC, CA, AB oldalegyenesekre vonatkozó tengelyes tükörképei rendre a g_a, g_b, g_c egyenesek. Legyen $\overline{A}$ a g_b és g_c, továbbá $\overline{B}$ a g_c és g_a, végül $\overline{C}$ a g_a és g_b metszéspontja. Az ábrával kapcsolatban néhány tételt mondunk ki és bizonyítunk be.



3. ábra

3. TÉTEL. *Az $\overline{ABC}$ háromszög hasonló az ABC háromszög talpponti háromszögéhez és vele ellentétes körül járású.*

Bizonyítás. A g_c tekinthető a g_a egyenesnek először a BC, majd a BA egyenesre vonatkozó tengelyes tükörképének. De két tengelyes tükrözés szorzata a metszéspont körüli, a tengelyek szögének kétszeresével történő forgatást jelent, tehát $Q_a\overline{B}\overline{A}\sphericalangle = 2CBA\sphericalangle$ (ahol Q_a a g és g_a egyenesek metszéspontja), tehát $\overline{ABC}\sphericalangle = 180° - 2\beta$. Innen a tétel könnyen adódik.

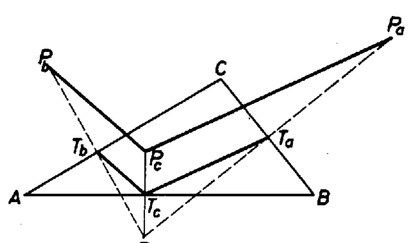
4. TÉTEL. *A $B\overline{B}$, $C\overline{C}$, $A\overline{A}$ egyenesek az $\overline{ABC}$ háromszög belső szögfelezői.*

Bizonyítás. Ha a B pontot mint a g_a egyenes pontját tekintjük, akkor a fenti két tengelyes tükrözés szorzata $\overline{B}$-t az E pontba viszi, így $\overline{B}BE\sphericalangle = 2\beta$; vagyis – ha BD merőleges g_c-re –, akkor $\overline{B}BD\sphericalangle = \beta$. Így $D\overline{B}B\sphericalangle = 90° - \beta$; tehát $B\overline{B}$ valóban szögfelezője az $\overline{ABC}$ szögnek.

5. TÉTEL. *Az $\overline{ABC}$ háromszög beírt körének $\overline{O}$ középpontja rajta van az ABC háromszög körülírt körén.*

Bizonyítás. A $C\overline{O}A$ szög kiegészítő szöge a $\overline{CBO}\sphericalangle = 90° - \beta$-nak, ezért $C\overline{O}A\sphericalangle = \beta$; így az $AB\overline{O}C$ négyszög valóban húrnégyszög.

Ha egy a g-vel párhuzamos h egyenesnek tekintjük a BC, CA, AB oldal-egyenesre vonatkozó tengelyes tükörképeit, akkor e tükörképek párhuzamosak lesznek g megfelelő tükörképeivel, így a $B_hC_hA_h$ háromszög középpontosan hasonló a $\overline{BAC}$ háromszöghöz. A BD egyenes h_c-re is merőleges lesz, ezért a BB_h és $B\overline{B}$ egyenesek egybeesnek. A párhuzamos egyenesek által létrehozott háromszögek közös beírt középpontja $\overline{O}$.



4. ábra

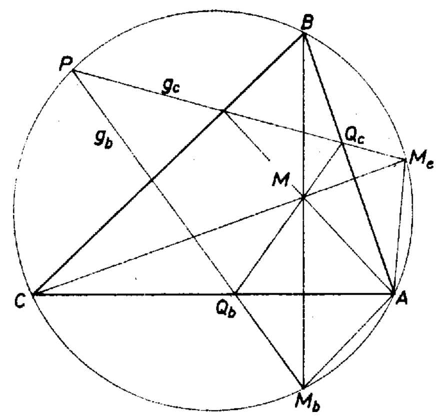
Kézenfekvő a kérdés: vannak-e olyan egyenesek, amelyeknek egy háromszög oldalegyeneseire vonatkozó tengelyes tükörképei egy ponton mennek keresztül? A 4. ábrán látható P pont akkor lehet a három tüköregyenes metszéspontja, ha P-nek a három oldalegyenesre vonatkozó tengelyes tükörképei: P_a, P_b, P_c kollineárisak. De P_a, P_b, P_c akkor és csak akkor kollineáris, ha T_a, T_b, T_c is az, ahol T_a, T_b, T_c a PP_a, PP_b, ill. PP_c egyeneseknek a megfelelő oldalakkal való metszéspontjai, hiszen $P_bP_a \parallel T_bT_a$, $P_aP_c \parallel T_aT_c$. De a T_a, T_b, T_c pontok a 2. tétel alapján akkor és csakis akkor kollineárisak, ha P rajta van ABC háromszög körülírt körén (most $\varphi = 90°$).

6. TÉTEL. *A körülírt kör minden P pontjához tartozik pontosan egy olyan g egyenes, amelynek az oldalakra vonatkozó tengelyes tükörképei: g_a, g_b, g_c átmennek a P ponton.*

Bizonyítás. P-nek az oldalegyenesekre vonatkozó P_a, P_b, P_c, tükörképei egyértelműen meghatározottak, így pontosan egy ilyen egyenes létezik.

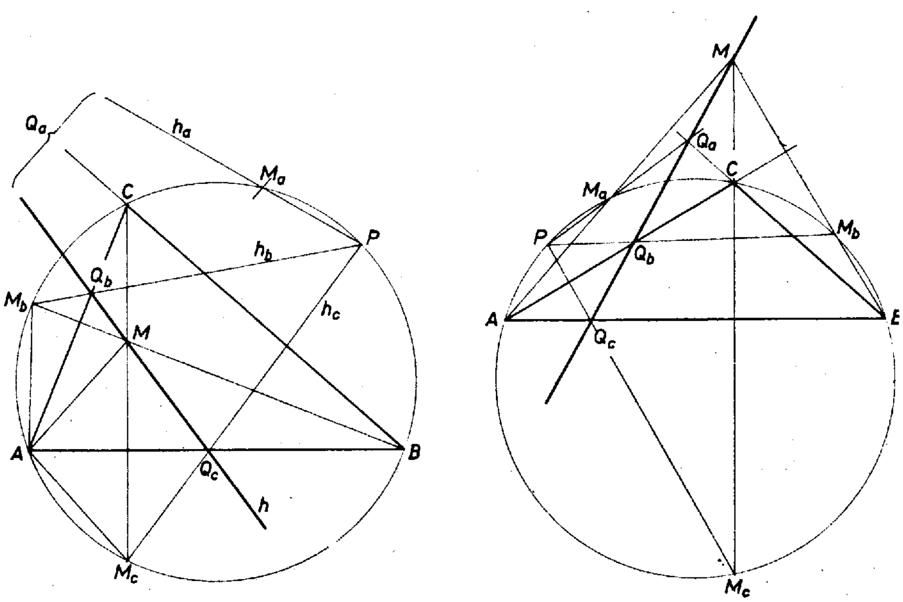
7. TÉTEL. *A P körülírt köri ponthoz a 6. tételben megjelölt g egyenes átmegy a háromszög M magasságpontján.*

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy Q_b, M és Q_c kollineárisak. AMQ_bM_b deltoid, tehát $Q_bM_bA\sphericalangle = AMQ_b\sphericalangle$; MAM_cQ_c szintén deltoid, tehát $AM_cQ_c\sphericalangle = Q_cMA\sphericalangle$; de M_bAM_cP a feltétel szerint húrnégyszög, így $Q_bM_bA\sphericalangle + AM_cQ_c\sphericalangle = 180^\circ = AMQ_b\sphericalangle + Q_cMA\sphericalangle$ (5. ábra).



5. ábra

8. TÉTEL. *Minden a magasságponton átmenő h egyeneshez tartozik a körülírt körnek pontosan egy pontja úgy, hogy h-nak az oldalegyenesekre vonatkozó tengelyes tükörképei átmennek ezen a ponton* (6. ábra).



6. ábra

Bizonyítás. Az előbbi deltoidok most is megvannak, most $AMQ_b\sphericalangle + Q_cMA\sphericalangle = 180^\circ = Q_bM_bA\sphericalangle + AM_cQ_c\sphericalangle$; így M_bAM_cP valóban húrnégyszög.

9. TÉTEL. *Ha négy egyenes négy háromszöget alkot, akkor a négy magasságpont egy egyenesen van.*

Bizonyítás. Legyen az 1. ábra GED háromszögének magasságpontja M_1, a GAB háromszögé M_2, a CAE háromszögé M_3, a DBC háromszögé M_4. Tekintsük az M_1M_2 egyenest. Legyen a 8. tétel alapján az M_1M_2 egyeneshez tartozó körülírt köri pont F. De az M_1M_3, illetve M_1M_4 egyenesekhez is F tartozik. A 6. tétel alapján azonban F-hez pontosan egy egyenes tartozhat, így a négy magasságpont egy egyenesen van.

⋆

Az 1. ábra AE szakaszát át akarjuk vinni ugyanezen ábra BD szakaszába, úgy, hogy az A pont B-be, az E pedig D helyére kerüljön. Legyen M a sík tetszőleges pontja. Forgassuk el M körül AGB szöggel az AE szakaszt. Elforgatottja az A_1E_1 szakasz. Ez ugyanolyan hosszú, mint AE és párhuzamos BD-vel. Legyen N az A_1B és E_1D egyenesek metszéspontja. Ekkor az N középpontú, $BD : AE$ arányú középpontos hasonlóság A_1E_1-et BD-be viszi. – Természetesen lehet először a középpontos hasonlóságot alkalmazni: M hasonlósági középpont és $BD : AE$ arány az AE szakaszt a vele párhuzamos A_2E_2 szakaszba viszi úgy, hogy A_2E_2 és BD egyenlő hosszúságú szakaszok. Legyen

L az A_2B felező merőlegesének és E_2D felező merőlegesének metszéspontja. Most L körüli, AGB szögű forgatás A_2-t B-be, E_2-t D-be viszi. Nyilván L és N két különböző pont. Így tehát minden (M) forgásközépponthoz szerkeszthető egy (N) hasonlósági középpont; és minden (M) hasonlósági középponthoz szerkeszthető egy (L) forgásközéppont úgy, hogy az első esetben egy AGB szögű forgatás és egy $BD : AE$ arányú középpontos hasonlóság, a második esetben egy $BD : AE$ arányú középpontos hasonlóság és egy AGB szögű forgatás szorzataként az AE szakasz a BD szakaszba megy át.

Kézenfekvő a kérdés: van-e a síkon olyan Q pont, amelyik nemcsak forgásközéppont, hanem hasonlósági középpont is, illetve olyan R pont, amely nemcsak hasonlósági középpont, hanem forgásközéppont is.

10. TÉTEL. *Egy hasonlósági transzformációnak legfeljebb egy fix pontja lehet.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van két fix pont: Q és R. Ekkor a QR szakasz képe is QR, így ebben az esetben az arány 1 és nem az előre megállapított.

Ha tehát sikerül olyan pontot találni, amely egyszerre forgásközéppont és hasonlósági középpont mindkét sorrendben, akkor megtaláltuk a keresett Q, illetve R pontot.

11. TÉTEL. *Az 1. ábra F pontja egyszerre forgásközéppont és hasonlósági középpont mindkét sorrendben.*

Bizonyítás. a) $AGD\sphericalangle = EFD\sphericalangle = AFB\sphericalangle$. Tehát az F körüli, AGD szögű forgatás az E pontot az FD egyenesre, E_3 pontjába viszi, az A pontot pedig az FB egyenesére az A_3 pontba. Így a forgatás után $A_3E_3 = AE$ és $A_3E_3 \parallel BD$. Az A_3B és E_3D egyenesek metszéspontja éppen F, így az F középpontú, $BD : A_3E_3 = BD : AE$ arányú középpontos hasonlóság AE-t BD-be viszi.

b) Alkalmazzunk először egy F középpontú, $BD : AE$ arányú középpontos hasonlóságot AE-re. Ez az A pontot az FA egyenes A_4 pontjába, az E pontot az FE egyenes E_4 pontjába viszi úgy, hogy $A_4E_4 = BD$ és $A_4E_4 \parallel AE$. Így az F körüli, AGD szögű forgás E_4-et a D, az A_4-et pedig a B pontba viszi.

F tehát annak a forgatva-nyújtásnak a középpontja, amely az AE szakaszt a BD szakaszba viszi.

1. feladat. Mutassuk meg, hogy F annak a forgatva-nyújtásnak is középpontja, amelyik az AB szakaszt az ED szakaszba viszi.

2. feladat. Mutassuk meg, hogy ha AB párhuzamos ED-vel, akkor G annak a forgatva-nyújtásnak a középpontja, amelyik AE-t BD-be viszi.

3. feladat. Szerkesztendő négyszög, ha adott négy oldala és két szemben fekvő szögének összege.

4. feladat. Igazoljuk, hogy egy négyszögben a szemben fekvő oldalak szorzatának összege nem kisebb, mint az átlók szorzata. Igazoljuk, hogy egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha a négyszög húrnégyszög.

⋆

Osztóviszony, ideális elemek

Legyen A, B, C három, egy egyenesen levő pont, ekkor az (ABC) osztóviszony az $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB}$ arányt jelenti. Vektorok osztását általában nem értelmezhetjük, de egyállású vektorok arányát igen, hiszen ezek egymásnak számszorosai. Az osztóviszony értelmezéséből következik, hogy az osztóviszony pozitív, ha C az AB szakaszon van, mégpedig az osztóviszony szigorúan monoton nő, ha C tart B felé. Az osztóviszony a B-n túli félegyenesen negatív, B környezetében alulról nem korlátos, a félegyenes minden pontjában (-1)-nél kisebb. Az A-n túli félegyenesen mindenütt -1 és 0 között van. Ha C bármelyik félegyenesen „elég távol" van, akkor a -1 előre meghatározott környezetébe esik az osztóviszony. Ezért célszerű az egyenest egy ideális ponttal kiegészíteni úgy, hogy az egyenes ideális pontjára legyen az osztóviszony értéke -1. Párhuzamos egyenesekhez közös ideális pontot célszerű rendelni, és így a sík bármilyen két egyenesének lesz pontosan egy közös pontja. Különböző állású egyenesekhez különböző ideális pontot rendelünk. (Ellenkező esetben ugyanis két különböző állású egyenesnek két közös pontja lenne: metszéspontjuk és ideális pontjuk.)

Két különböző ideális ponthoz az őket összekötő egyenest kell rendelnünk. Ennek az egyenesnek közönséges pontja nem lehet, mert egy közönséges pont és egy ideális pont meghatároz egy közönséges egyenest, közönséges egyeneshez pedig pontosan egy ideális pontot rendeltünk. Két ideális pontot összekötő egyenesnek minden pontja ideális pont, így ez az egyenes ideális egyenes.

A síkhoz egyetlen ideális egyenest célszerű rendelni. Ha ugyanis volna olyan ideális pont, amelyik nincs rajta az ideális egyenesen, akkor ez a pont és az ideális egyenes egy rögzített pontja meghatározna egy második ideális egyenest, és ekkor volna olyan közönséges egyenes, amelyik mindkét ideális egyenest metszené, tehát volna közönséges egyenes két ideális ponttal.