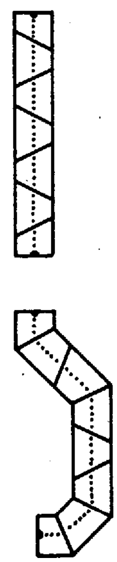
Láncszerű, térbeli logikai és türelemjátékok vizsgálata

Az alcímben szereplő, kicsit hosszú elnevezés azoknak a játékoknak összefoglaló neve, melyek azonos elemekből, főleg kockákból vagy más egyszerű téridomokból állnak, és az elemek „láncszerűen" – egy gumiszál vagy valamilyen más összekötés segítségével – kapcsolódnak egymáshoz.

A legegyszerűbb láncolatok elemei nemcsak külsőleg azonosak, hanem ezek belső szerkezete és az egymáshoz való kapcsolódásuk módja is megegyezik. Jó példa erre egy 1971-ben, Finnországban szabadalmaztatott játék, amely kis átmérőjű hengerből vagy szabályos sokszög alapú hasábból származtatható oly módon, hogy hossztengelyére váltakozó irányú ferde szögben azonos nagyságú elemeket metszünk le belőle. A játékot a henger hossztengelyében vezetett fonál tartja össze (1. ábra). A játékot gyerekeknek szánták, akik élvezik a vonalvezetés változatosságát, alakíthatóságát. Valamilyen korabeli nyaklánc, vagy Thüringia vidékén az 1700-as évekből ismert, ízelt darabokból álló, hajlékony szalagra ragasztott sárkány- vagy kígyófigura volt a játék őse.

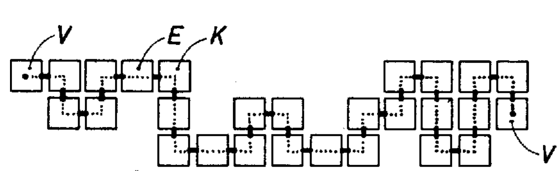


1. ábra

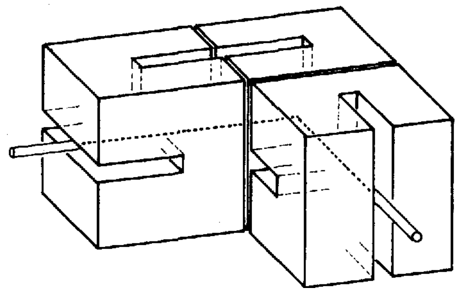
Hasonlóan egyszerű felépítésű, de konstrukciójában átgondoltabb, absztraktabb Rubik Ernő bűvös kígyója is. Ebben is azonos minden elem: olyan egyenlő szárú derékszögű háromszög alapú hasáb, amelynek magassága megegyezik a háromszög szárainak hosszával. Így az elemeknek két-két, egymással derékszöget bezáró négyzetes oldallapja van, ezekkel illeszkednek egymáshoz.

A kockákból való építkezés előnyeit Rubik „A bűvös kocka" című könyvében Kockacsalád címszó alatt részletesen tárgyalja és megállapítja: *„Csak a kockából mint elemből tudom önmagát felépíteni, a tetraédert és az oktaédert csak tetraéderből és oktaéderből (egyszerre mindkettőből), a dodekaéder és az ikozaéder pedig nem bontható a szabályos testek egyikére sem."* Ez csak olyan típusú játékoknál okozhat problémát, mint a bűvös kocka, ahol együtt maradó, de a metszési síkok mentén elforgatható elemekből kell a szerkezetet kialakítani – bár itt sem mindig, hiszen létezik bűvös tetraéder (PIRAMINX) és bűvös dodekaéder is. A láncolatos kialakításoknál az alapelemek csak a megelőző és a követő elemmel kapcsolódnak (a végelemek értelemszerűen csak ezek egyikével). Így semmi akadálya sincs annak, hogy tetraéderekből, oktaéderekből vagy akár ikozaéderekből azonos elemekből álló láncot hozzunk létre. Ám ezekből a láncokból már nem tudjuk felépíteni az alkotó elemek megnagyobbított mását! Azonban, ahogyan kockákból hasábokat, vagy lépcsős piramist készíthetünk, ugyanígy más alapelemekből is kialakíthatók különböző síkbeli és térbeli alakzatok vagy sematikus figurák. Ezek hajtogatása, illetve összeforgatása is türelmet, konstrukciós érzéket kíván.

Visszatérve a kockákból összeállított láncra, válasszunk ki egy jól körülhatárolt idomot, egy nagy (pl. $3 \times 3 \times 3$-as) kockát, mint összerakandó célt. Homogén felfűzésű (azonos kialakítású) kockákból nem tudjuk a nagy kockát összeépíteni. Így a láncban elhelyezkedő elemek között kell lennie *egyenes elemnek*, amelyben a felfűzési út a két szemben fekvő lap középpontján halad keresztül, és *kanyarelemnek* is, amelyben a felfűzési út két szomszédos, élben találkozó lapon halad át. A 2. ábra egy láncot szemléltet síkba kiterített állapotban, amelyen egy egyenes elemet E-vel, egy kanyar elemet K-val jelöltünk meg, és a két végelemet V-vel. Kialakíthatunk zárt hurkot is, természetesen ekkor végelemről nem beszélhetünk.



2. ábra



3. ábra

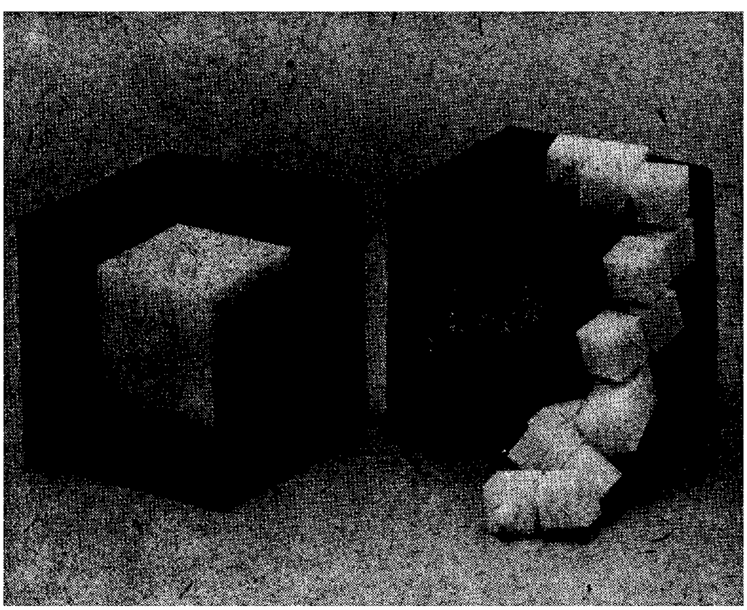
Érdekes kialakítású a svájci Naef cég által forgalomba hozott játéklánc, amelynek elemei egyszerre egyenes és kanyarelemek is (3. ábra). Az elemi kockák két szemközti oldalán egy-egy, egymásra merőleges bemarást készítettek oly módon, hogy a kocka középpontján kis átmenő rés keletkezzék (ún. kereszthasítékos megoldás). Mivel az összefogó szál rugalmas fonal vagy gumi, bármelyik kocka a szomszédos kocka más oldalaira is átpattintható. Ez a kialakítás szerkezetileg egyszerű, de a logikai játéklehetőséget leszűkíti. Ha a hajtogatás során egy egyenes elem helyett kanyarelem kellene, akkor egyetlen mozdulattal (a probléma leegyszerűsítésével) gyorsan célhoz érhetünk.

Korrekt feladatmegoldásra ösztönöz az 1962-ben az USA-ban piacra hozott „Block puzzle" nevű játék. A játékot meghatározott számú egyenes és kanyarelemből, adott sorrendben felfűzve hozták forgalomba. A feladat így főleg kezdetben érdekes, az első néhány összeállításig. A fix felfűzés miatt a játék megrongálása nélkül nincs mód arra, hogy a kínálkozó nagyszámú összeépítési lehetőséget kihasználjuk.

Az említett játékoktól függetlenül Magyarországon is született egy ROCK elnevezésű lánc, amit „Poly-chain" néven mutattak be a nürnbergi játékkiállításon. A cikk további részében ezzel a játékkal foglalkozunk.

A ROCK

Elvileg alkalmas a teljes, matematikailag megoldható feladathalmaz modellezésére. Különleges kialakítású, egymáshoz bepattintással kapcsolható egyenes, kanyar, és kétféle végeleme van („apa", illetve „anya" végződésű). Az alapkészletben 23 kanyarelem, 11 egyenes elem és 12 végelem van. Ez elegendő ahhoz, hogy maximálisan a $3\times3\times3$-as nagykockáig a kockacsalád valamennyi elemét az összes lehetséges módon összerakhassuk.



Az oldható kapcsolóelemekből származó előnyök:

– Meghatározott számú kiskockát tartalmazó, adott elrendezésben felfűzött játékláncból a nagykocka, vagy valamilyen hasáb rakható össze. Ismételt játszás során, mielőtt az összerakás rutinszerűvé válna, az elemek felcserélésével más sorrend, és így másik játék alakítható ki.

A játék célja ezután pl. ismét a nagykocka összeállítása lehet, de most már új kiindulási formában.

– Új játéklánc hozható létre azáltal is, hogy a láncolatot szétszedve, a tartalékelem készlet felhasználásával a benne levő sarok- és kanyarelemek arányát változtatjuk meg. (Az új összetételű láncban is felcserélhetjük, megváltoztathatjuk az elemek felfűzési sorrendjét.)

– Az említett lehetőségek kihasználása után, újabb elemek hozzáadásával (több alapkészletből) egy nagyobb kocka összeállítása lehet a cél. Így pl. a $3\times3\times3$-as nagykocka minden elképzelt és megvalósítható lehetőségeinek végigjátszása után egy $4 \times 4 \times 4$ vagy $5 \times 5 \times 5$-ös kocka kialakítását célozhatjuk meg. Gyakorlatban az $5 \times 5 \times 5$-ös kocka már-már „megoldhatatlan” feladat.

– A lánc végtelenítése tovább nehezítheti a játékot.

– A játék nehézségi foka széles határok között változik. Vannak önmaguktól adódó, triviális megoldások, pl. a $3 \times 3 \times 3$-as kockánál rövid idő alatt leporellós, könyvszerűen összehajtható a következő lánc:

$$V\text{-}E\text{-}K\text{-}K\text{-}E\text{-}K\text{-}K\text{-}E\text{-}K\text{-}K\text{-}E\text{-}K\text{-}K\text{-}E\text{-}K\text{-}K\text{-}E\text{-}K\text{-}K\text{-}E\text{-}K\text{-}K\text{-}E\text{-}K\text{-}K\text{-}E\text{-}V$$

De van olyan lánc is, melyből már igen nehéz kockát kirakni.

– A megbontható és újra összerakható konstrukció további előnye, hogy bepattintott állapotban minden csatlakozásnál könnyen forgatható, hajtogatható anélkül, hogy a lánc elszakadna – ez a játékost a szabályszerű használatra ösztönzi.

Feladatul nem csak a kockát, hanem a kockacsalád más tagjait is kiszemelhetjük. Az egydimenziós növekedést egyenes elemekkel érhetjük el. A kétdimenziós feladatok már nem triviálisak. Mivel az alapkészletben 36 elem van, kitűzhető az összes olyan téglalap összerakása, melyek oldalainak szorzata legfeljebb 36 (pl. 2×18, 3×12, 4×9, 6×6).

Adott láncelrendezés mellett a háromdimenziós téglatestek közül csak nagyon kevés a megvalósítható, ezek is főleg kis elemszám esetén. A lehetséges téglatestek száma 15. (Az 1-től 36-ig tartó számsor tagjait három 1-nél nagyobb egész szám szorzataként ennyiféleképpen lehet felbontani, pl. a 36-ot $2 \times 2 \times 9$; $2 \times 3 \times 6$; $3 \times 3 \times 4$ alakban.)

Joggal merülhet fel a kérdés, hogy az alapkészletben miért van szükség 23 kanyar- és 11 egyenes elemre, mikor csak a 27 elemből álló kockát kívánjuk összeállítani? *D. Singmaster* londoni matematikus kezdte vizsgálni az összeépítési lehetőségeket, az egyenes és kanyarelemek lehetséges számát és egymáshoz viszonyított elhelyezkedésüket. Megállapításaira támaszkodunk a további elemzésben.

Megvizsgáljuk, hány egyenes elemet tudunk a különböző összeépítésű láncokban úgy elhelyezni, hogy a $3 \times 3 \times 3$-as kocka még összehajtogatható legyen. Mivel a végelemeket semlegesnek tekintjük, az egyenes (E) és a kanyarelemek (K) száma:

$$E + K = 25.$$

Világos, hogy két egyenes elem nem állhat egymás után, mert ez 4 egységhosszt jelentene, ami meghaladná a kockaél méretét. Ezért legfeljebb 13 egyenes elem lehet a láncban és az is csak a következőképpen:

$$V\text{-}E\text{-}K\text{-}E\text{-}K\text{-}E\text{-}K\text{-}E\text{-}K\text{-}E\text{-}K\text{-}E\text{-}K\text{-}E\text{-}K\text{-}E\text{-}K\text{-}E\text{-}K\text{-}E\text{-}K\text{-}E\text{-}K\text{-}E\text{-}K\text{-}E\text{-}V$$

Ebben az esetben az egyenes elemeknek élközép helyen kellene állniuk, a K elemeket és a végelemeket csak a kocka sarkaiban helyezhetnénk el, azaz 8 sarokba 14 elemet. Ez lehetetlen.

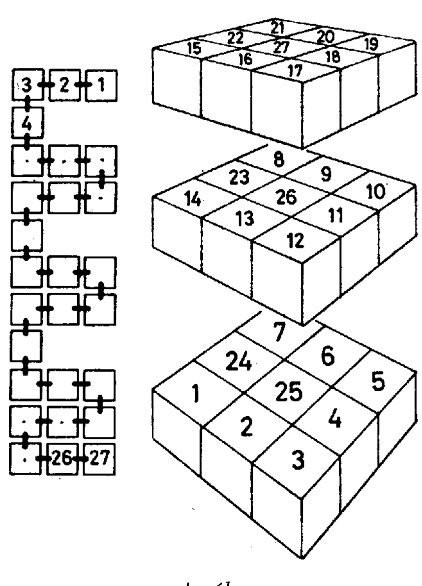
Csökkentsük tehát az egyenes elemek számát:

$$E = 12 \quad \text{és} \quad K = 13.$$

Továbbra is fennáll az a feltétel, hogy egymás után 2 egyenes elem nem állhat. Mivel az egyenes elemek számát eggyel csökkentettük és a kanyarelemekét eggyel növeltük, két olyan kanyarelemünk keletkezett, amelyeknél a láncot úgy hajlíthatjuk, hogy az lapközépre, illetve kockaközépre kerüljön. Így két dupla ($..\ E\ K\ K\ E\ ..\ E\ K\ K\ E\ ..$) vagy egy tripla ($..\ E\ K\ K\ K\ E\ ..$) hajlításra van lehetőségünk.

A kockaközépre akár E-t akár K-t helyezünk, a továbbvezetéshez és visszafordításhoz több K elemet kellene felhasználnunk, mint ami rendelkezésünkre áll. Tehát az $E = 12$ is lehetetlen.

Azt, hogy $E = 11$, $K = 14$ esetben van olyan lánc, amiből a kockát össze lehet illeszteni, egy példával bizonyítjuk. A 4. ábra a láncot és az összeállítás sorrendjét mutatja.



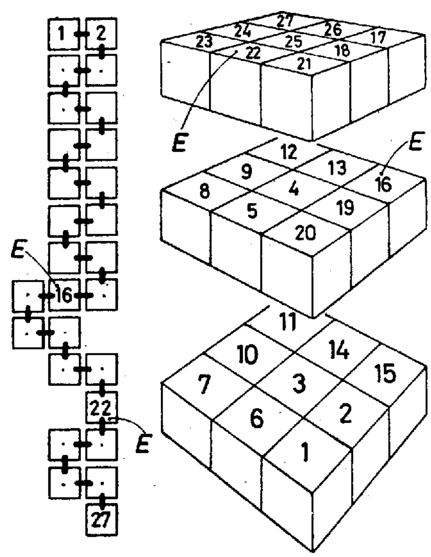
4. ábra

Ezek után próbáljuk meghatározni az egyeneselemek számának minimumát.

Ha $E = 0$, azaz csak kanyarelemek vannak, akkor egy sarokpontról csak úgy juthatunk el a következő sarokpontig, ha közben legalább egy lapközépen is átmegyünk. A $3 \times 3 \times 3$-as kockán összesen 14 sarok és lapközéppont van, és mivel minden sarok után egy-egy lapközepet is érinteni kellene, így legalább 7 lapközépponton kellene átmenni, ami lehetetlen.

Próbálkozzunk az $E = 1$-gyel. Az egyenes elemet 2 sarokpont összekötésére kellene felhasználnunk, mert különben a továbbhaladás szempontjából két nélkülözhetetlen lapközepet vesztenénk el.

A megmaradó többi sarokelem szomszédos a 6 db lapközéppel. Minden sarok–lapközép, illetve lapközép–sarok összekötés még egy élkockát is elfoglal, így $12 + 1$ élre lenne szükség. Azaz $E = 1$ is lehetetlen.



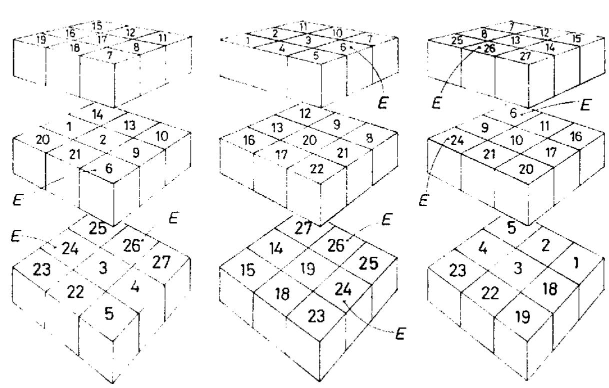
5. ábra

Az $E = 2$ lehetőséget az 5. ábra szemlélteti. A megoldás természetesen csak az egyik a lehetségesek közül, a 2 egyenes elemet sokféleképpen lehet elhelyezni.

Példákkal bizonyítható, hogy az $E_{\min} = 2$ és az $E_{\max} = 11$ között E minden értéke lehetséges.

Rögzített E értéknél az egyenes- és a sarokelemek elrendezésének száma (figyelembe véve, hogy a végelemek nem vesznek részt a számításban) $\binom{25}{E}$.

Ezek között vannak megoldhatatlanok. Más oldalról vannak olyan láncok, amelyekkel a feladat többféleképpen, többféle útvonalon megoldható. A 6. ábra erre mutat példát, a láncban $E = 3$ egyenes elem van. (L. borítólapon)



6. ábra, a hátsó borítóról

További lehetőségek

Eddig a kocka alakú alapelemből álló játékláncok szerkezeti viszonyait vizsgáltuk. Az elemi kockákat vagy azok egy részét megfestve további lehetőségek adódnak. *Bognár* INKA-kockája a láncolt játékok és *Mac Mahon** színes kockáinak kombinációja. A szerkezeti megoldás megengedi, hogy a kiskockák elemi középpont körül körbe forduljanak és így ne mindig ugyanazokon az oldalfelületeken kapcsolódjanak. (Hasonlóan az átpattintós lánchoz, bár ott ez nem

*Század eleji francia matematikus

valósul meg teljesen.) Ezáltal különféle szimmetrikus, színes ábrák hozhatók létre. Az INKA játék 8 db elemi kockát használ fel láncához és ezeket színezi úgy, hogy egy oldallapon több szín is található.

Egyszerűbb a színezése a „Rattlesnake” elnevezésű, 27 elemű kockaláncolatnak. Szerkezeti megoldása: gumiszál feszítésű $E - K$ univerzális elemek. Az elemeket 6 színnel festik be, és a cél egy olyan nagykocka összehajtogatása, melynek oldallapjai azonos színűek.

Gyakori, hogy a kockaláncok elemei közül vagy a páros vagy páratlan elemeket a teljes felületükön megszínezik. Ezek ugyan nem változtatnak a feladatmegoldás nehézségén, csupán érdekes vizuális hatást keltenek: az összehajtott kocka oldallapjai sakktáblaszerűen vannak kiszínezve.

Végül két feladatot tűzünk ki:

1. Bizonyítsuk be, hogy a $2 \times 2 \times 2$-es és a $4 \times 4 \times 4$-es kocka láncolatos felépítése végteleníthető, míg a $3 \times 3 \times 3$-asé nem.

2. Lehet-e a láncolat kiindulópontja a $3 \times 3 \times 3$-as kocka közepén?

A ROCK-játék kapcsán még sok válaszra váró kérdés vethető fel. A szerzők örömmel vesznek minden véleményt és természetesen a feladatok megoldását is.