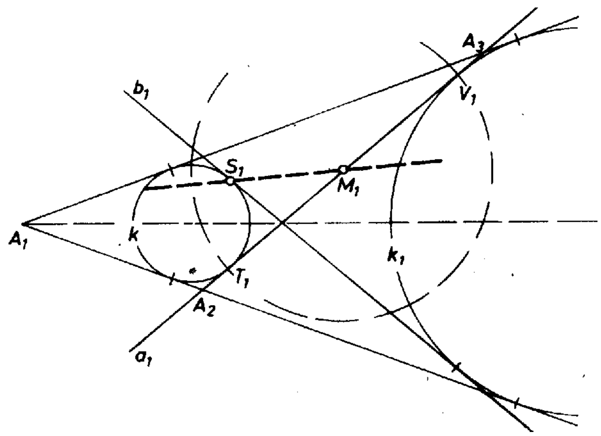
Feladat: *Egy $A_1A_2A_3$ háromszög nem egyenlő szárú, oldalait jelöljük a_1, a_2, a_3-mal (a_1 fekszik A_1-vel szemben). Minden i-re ($i = 1, 2, 3$) M_i az a_i oldal felezőpontja, T_i az a pont, amelyben a beírt kör érinti a_i-t és S_i a T_i pont tükörképe az A_i-hez tartozó belső szögfelezőre nézve. Bizonyitsuk be, hogy az M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 egyenesek egy ponton mennek át.*

Megoldás. Az a feltétel, hogy a $A_1A_2A_3$ háromszög nem egyenlő szárú, biztosítja, hogy a kérdéses egyenesek léteznek és különbözők. Tükrözzük a háromszög a_1 oldalegyenesét az A_1 csúcsból induló belső szögfelezőre. A kapott b_1 egyenes érinti a k beírt kört, mégpedig T_1 pont tükörképében, azaz S_1-ben, továbbá érinti a háromszög a_1-hez hozzáírt k_1 körét is (1. ábra).



1. ábra

Tekintsük az M_1 középpontú, $M_1T_1 = M_1V_1$ sugarú körre vonatkozó *inverziót*. Ez az inverzió helyben hagyja a k és k_1 köröket, hiszen mindkettő merőleges az inverzió alapkörére: a T_1, illetve V_1 metszéspontokból a középpontokba mutató sugarak merőlegesek egymásra. Állítjuk, hogy a b_1 egyenes inverze éppen a háromszög *Feuerbach*-köre. Ebből a feladat állítása következik. Mivel b_1 érinti k-t és k_1-et is, azért b_1 inverze érinti k-nak, valamint k_1-nek inverzét, következésképp

egy háromszög Feuerbach-köre érinti a háromszög beírt körét, továbbá a három hozzáírt kört is.

A beírt kör és a Feuerbach-kör érintési pontja inverz képe annak a pontnak, ahol b_1 és k érinti egymást, vagyis az S_1 pontnak, és így rajta van az M_1S_1 egyenesen. Ugyanez az érintési pont rajta van az M_2S_2, M_3S_3 egyeneseken is, s így M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 valóban egy ponton mennek át, ahogyan a feladat állította.

Annak igazolása maradt még hátra, hogy b_1 inverz képe a háromszög Feuerbach-köre. Mivel b_1 nem megy át az inverzió középpontján, M_1-en ($a_2 \neq a_3$ miatt), b_1 inverze egy M_1-en átmenő kör. S mivel az $A_1A_2A_3$ háromszög Feuerbach-köre az $M_1M_2M_3$ középháromszög körülírt köre, elegendő megmutatnunk, hogy M_2 és M_3 is rajta van b_1 inverz képén, azaz

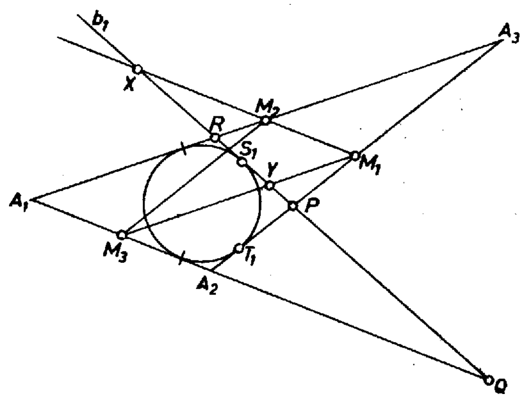
$$M_1X \cdot M_1M_2 = M_1Y \cdot M_1M_3 = M_1T_1^2,$$

ahol X, ill. Y az M_1M_2, ill. M_1M_3 félegyenesnek és a b_1-nek metszéspontjai (2. ábra). Mivel $A_2T_1 = s - a_2 = (a_1 + a_3 - a_2)/2$ és $M_1A_2 = a_1/2$, azért

$$M_1T_1^2 = (M_1A_2 - A_2T_1)^2 = \frac{(a_2 - a_3)^2}{4}.$$

P az A_1-ből induló belső szögfelezőnek és a_1-nek a metszéspontja, tehát

$$PA_2 = \frac{a_1a_3}{a_2 + a_3}, \quad PA_3 = \frac{a_1a_2}{a_2 + a_3},$$
$$PM_1 = |M_1A_2 - PA_2| = \frac{a_1|a_2 - a_3|}{2(a_2 + a_3)}.$$



2. ábra

Végül a PXM_1 és PQA_2 hasonló háromszögekből

$$M_1X : A_2Q = PM_1 : PA_2 = \frac{a_1|a_2-a_3|}{2(a_2+a_3)} \cdot \frac{a_2+a_3}{a_1a_3} = \frac{|a_2-a_3|}{2a_3},$$

vagyis

$$M_1X \cdot M_1M_2 = \frac{|a_2-a_3|}{2a_3} \cdot A_2Q \cdot M_1M_2 = \frac{(a_2-a_3)^2}{2a_3} \cdot \frac{a_3}{2} = M_1T_1^2.$$

A PYM_1 és PRA_3 hasonló háromszögekből pedig

$$M_1Y : A_3R = PM_1 : PA_3 = \frac{|a_2-a_3|}{2a_2},$$

vagyis

$$M_1Y \cdot M_1M_3 = \frac{|a_2-a_3|}{2a_2} \cdot |a_2-a_3| \cdot \frac{a_2}{2} = M_1T_1^2.$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk, s azt is, hogy ez a közös pont éppen a beírt kör és a Feuerbach-kör érintési pontja.

Feladat: *Tekintsük a következő tulajdonságú valós (x_n) számsorozatokat*: $x_0 = 1$, és $i \geq 0$ esetén $0 < x_{i+1} < x_i$.
(a) Bizonyítandó, hogy minden ilyen sorozathoz van olyan $n \geq 1$, amelyre

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3{,}999.$$

(b) Adjunk meg egy ilyen sorozatot, amelyre minden n esetén

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4.$$

Megoldás. Legyen $s = \{x_0,\ x_1,\ \ldots\}$ egy megfelelő számsorozat, és legyen

$$S_n = \frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n}.$$

Minden ilyen s sorozatra tekintsük azt az $s^{(1)} = \{y_0, y_1, \ldots\}$ sorozatot, amelyet az

$$y_i = \frac{x_{i+1}}{x_1}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

összefüggés definiál. Nyilvánvalóan $s^{(1)}$ is megfelelő sorozat, azaz $y_0 = 1$ és $0 < y_{i+1} < y_i$ az $i \geq 0$ esetén, továbbá

$$S_n^{(1)} = \frac{y_0^2}{y_1} + \frac{y_1^2}{y_2} + \ldots + \frac{y_{n-1}^2}{y_n} = \frac{1}{x_1}\left(\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \ldots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}}\right) =$$
$$= \frac{1}{x_1}\left(S_{n+1} - \frac{x_0^2}{x_1}\right) = \frac{1}{x_1}\left(S_{n+1} - \frac{1}{x_1}\right),$$

hiszen $x_0 = 1$.

Belátjuk, hogy a feladat (a) állítása nemcsak 3,999-re, hanem minden 4-nél kisebb pozitív a számra teljesül. Valóban, tegyük fel, hogy mégis volna olyan megfelelő s számsorozat, melyre minden n-re $S_n < a$ teljesül. Ekkor a fent definiált $s^{(1)}$ sorozat olyan, hogy minden n-re

$$S_n^{(1)} = \frac{1}{x_1}\left(S_{n+1} - \frac{1}{x_1}\right) < \frac{1}{x_1}\left(a - \frac{1}{x_1}\right) = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{x_1}\right)^2 \leqq 4 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2.$$

Az $s^{(1)}$-ből ugyanilyen módon képzett $s^{(2)}$ sorozatra

$$S_n^{(2)} < \frac{\left(a^2/4\right)^2}{4} = 4 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^4,$$

s általában ha az $s^{(k+1)}$ sorozatot a fenti mintára kapjuk az $s^{(k)}$ sorozatból, akkor minden n-re

$$S_n^{(k+1)} < \frac{1}{4}\left(4 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^{2^k}\right)^2 = 4 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^{2^{k+1}}.$$

Indirekt feltevésünk szerint $a < 4$, tehát $a/4 < 1$, így a jobb oldal elég nagy k-ra kisebb 1-nél. De ez lehetetlen, hiszen ha $s^{(k+1)} = \{z_0, z_1, \ldots\}$, akkor például

$$S_0^{k+1} = \frac{z_0^2}{z_1} = \frac{1}{z_1} > 1.$$

Ezzel a feladat (a) állítását bebizonyítottuk.

Legyen most $s = \{x_0, x_1, \ldots\}$ olyan megfelelő sorozat, melyre $S_n < 4$ minden n-re. Az előbbieket $a = 4$-re alkalmazva kapjuk, hogy az $s^{(1)}$ sorozatra

$$S_n^{(1)} < \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{x_1}\right)^2 = 4 - \left(2 - \frac{1}{x_1}\right)^2$$

minden n-re. Az előbb láttuk, hogy $4 - \left(2 - \dfrac{1}{x_1}\right)^2 < 4$ nem lehetséges, így x_1 csak $1/2$ lehet. Ekkor az $s^{(1)}$ sorozat tagjai rendre 1, $2x_2$, $2x_3$, …. Mivel az $s^{(1)}$ sorozatra is igaz, hogy $S_n^{(1)} < 4$ minden n-re, azért az $s^{(1)}$ sorozat második tagja, $2x_2$, csak $1/2$ lehet. Ezért $x_2 = 1/4$, és az $s^{(2)}$ sorozatra, melynek tagjai így 1, $4x_3$, $4x_4$, …, $S_n^{(2)} < 4$ teljesül minden n-re. Ezt folytatva kapjuk, hogy ha van olyan megfelelő sorozat, mely teljesíti a feladat (b) részének feltételeit, akkor az csak az $1, 1/2, 1/4, \ldots, 1/2^n, \ldots$ sorozat lehet, ez pedig könnyen láthatóan jó. Így nemcsak megadtunk ilyen sorozatot, hanem azt is bizonyítottuk, hogy csak egy ilyen van.