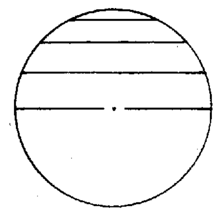
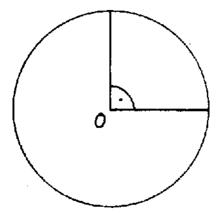
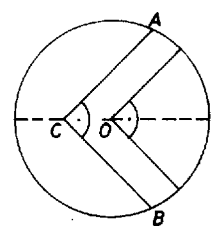
Vessünk fel egy igen egyszerű kérdést: a körvonal két pontját összekötő egyenes szakaszok közül melyik a leghosszabb? – A kérdés olyan szorosan kötődik a szemlélethez, hogy a kisiskolás is tud rá válaszolni (1.ábra). Rajzoljunk most derékszögű töröttvonalakat a körbe; ezek közül melyik a leghosszabb? A két merőleges sugár együttes hossza (2. ábra) még nem ad maximumot, erről könnyen meggyőződhetünk (3. ábra). Amikor az ACB töröttvonal hossza maximális, az AB távolság a lehető legnagyobb (4. ábra). Ekkor a C pont a kerületen van.



1. ábra

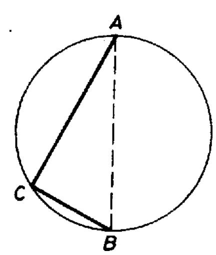


2. ábra

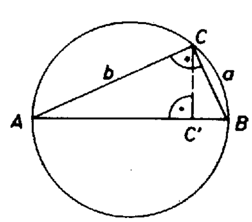


3. ábra

Az ACB töröttvonal hossza egy derékszögű háromszög két befogójának az összege. Az 5. ábra jelölésével futtassuk C-nek az AB átmérőre eső (merőleges) vetületi pontját A-ból B-be.



4. ábra



5. ábra

A középérték-tételek alapján

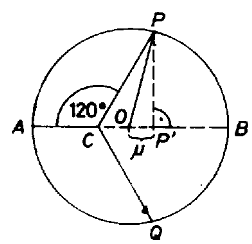
$$a+b=\sqrt{C'B\cdot AB}+\sqrt{C'A\cdot AB}=\sqrt{AB}\big(\sqrt{C'A}+\sqrt{C'B}\big).$$

Ez a kifejezés csak az AC' távolság függvénye, ha r adott. Mivel AB – és ezzel együtt $\sqrt{AB}$ is – állandó, az $a+b$ és a $\sqrt{C'A}+\sqrt{C'B}$ együtt növekszik, majd fogy, közben a maximumot $C'A-\frac{1}{2}AB$-nél éri el. A tételt ismerjük: adott átfogójú derékszögű háromszögek közül annak a kerülete maximális, amelynek egyenlők a befogói. Ekkor egyúttal a terület is maximális.

Nézzünk összetettebb problémákat is! Vegyünk fel a kör AB átmérőjén egy tetszőleges C pontot, majd az AC szakaszra C-ből mérjünk fel mindkét irányban 1 – 1 120°-os szöget. Ez a két szögszár a körvonalon kijelöli a P és Q pontot. C mely helyzetéhez tartozik az $AC+CP+CQ$ szakaszösszeg legnagyobb értéke? (6. ábra.)

Miközben C az átmérőn vándorol, a kérdezett összeg eleinte növekszik, majd fogy. Máshogyan megfogalmazva: az AC növekedési üteme először felülmúlja a másik két szakasz együttes fogyási ütemét, majd ez megfordul. Előzetes vizsgálódás során legyen $C\equiv A$, ekkor a fenti összeg $2r\sqrt{2}$. Ha pedig $C\equiv B$, akkor az összeg $2r$. Több módon is igazolható, hogy a keresett szélső érték $AC=r$ esetén alakul ki.

Lássunk egy változatot!



6. ábra

Legyen az ábra szerint u a P pont P'-vel j elölt vetületének távolsága a kör középpontjától. Pitagorasz tételéből kiindulva, a 60°-os derékszögű háromszögre támaszkodva felírjuk a CP szakaszt, majd kivonással az AC szakaszt is u függvényeként:

$$CP=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{r^2-u^2};\quad AC=r+u-\frac{\sqrt{r^2-u^2}}{\sqrt{3}},\quad 0\le u\le r.$$

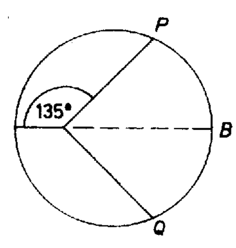
Ebből

$$AC+CP+CQ=r+u-\frac{\sqrt{r^2-u^2}}{\sqrt{3}}+\frac{4\sqrt{r^2-u^2}}{\sqrt{3}}.$$

Ennek a szélsőértékhelye deriválással:

$$u=\frac{r}{2}\ \text{(maximum)}.$$

A keresett összeg: $3r$.



7. ábra

Legyen a következő feladatban $ACP\sphericalangle=ACQ\sphericalangle=135°$ (7. ábra). Most C mely helyzetében lesz az előbbi 3 szakasz összege a legnagyobb? – A számítás az előzőhöz hasonló. Jelöljük a szakaszösszeg-függvényt, f-fel:

$$f=r+u-\sqrt{r^2-u^2}+2\sqrt{2}\sqrt{r^2-u^2}=r+u+\sqrt{r^2-u^2}\big(2\sqrt{2}-1\big).$$

Ennek az u szerinti első differenciálhányadosát egyenlővé tesszük 0-val, és az egyenletet u-ra megoldjuk. Az eredmény:

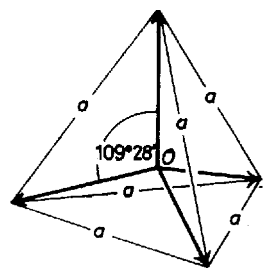
$$u=\frac{r}{\sqrt{10-4\sqrt{2}}}\approx 0{,}4798r.$$

Az eredményről leolvasható, hogy a V alakban terpeszkedő 2 egyenlő szakasz visszaszorítja az AC-t, így áll elő a maximum. Most $AC\approx 0{,}6r$.

Ennek ellenkezője következik be, ha $ACP\sphericalangle = ACQ\sphericalangle = 90°$. Ekkor $u \approx 0{,}4472r$, vagyis u csökkent. Ha az $ACP\sphericalangle = ACQ\sphericalangle$-et változtatjuk az értelmezési tartományban, az u értéke is változik. Érdekes feladat ennek a függvénykapcsolatnak a feltárása, megadása.

A problémasort elindító feladat többféleképpen általánosítható síkban és térben is. Tekintsünk csupán egy ilyen általánosított feladatot! – Egy pontból kiinduló, párosával egyenlő szöget bezáró 4 félegyenes rendszerét hogyan helyezzük el egy gömbben, hogy a gömbbe eső szakaszok összege maximális legyen?

A megoldás logikai rendje a tárgyaltakéhoz hasonló. Az eredmény – mint a szimmetriaviszonyok alapján várható – a gömb középpontjából kiinduló 4 olyan sugár, melyben kettő-kettő mindig ugyanakkora szöget zár be egymással. Mekkora ez a szög? – A szabályos tetraéder magasságpontjából a csúcsokba futó szakaszok hajlásszögéről van szó. Ez a szög kerekített értékben $109°28'$, pontosabban: $109{,}4712°\ldots$. A tárgyalt szögnek a természetben kitüntetett szerepe van, példaként említsük csupán a germánium-kristály rácsszerkezetét és a metán molekula térszerkezetét. (8. ábra).



8. ábra

Vessük fel a következő kérdést: egy síkban fekvő, azonos pontból kiinduló félegyenesek közül a $2-2$ szomszédos elem által bezárt szög legyen egyenlő. Hol, helyezzük el ezt a sugársort egy körben, ha azt akarjuk, hogy a körbe eső szakaszok összege maximális vagy éppen minimális legyen?

Az eredmény ismerős. Érdemes még egy percig itt időznünk, mert a feladat rokon egy alapvetően fontos tétellel: a körbe rajzolható n oldalú konvex sokszögek közül a *szabályos*nak a legnagyobb a kerülete, a körülírhatók közül pedig a szabályosé a legkisebb. A gömb szélsőérték tulajdonsága adja a választ arra a tréfás kérdésre, hogy miért nem szögletes a szappanbuborék. Az ismert tétel változatai a tankönyvekben és a versenyeken is helyet kapnak.