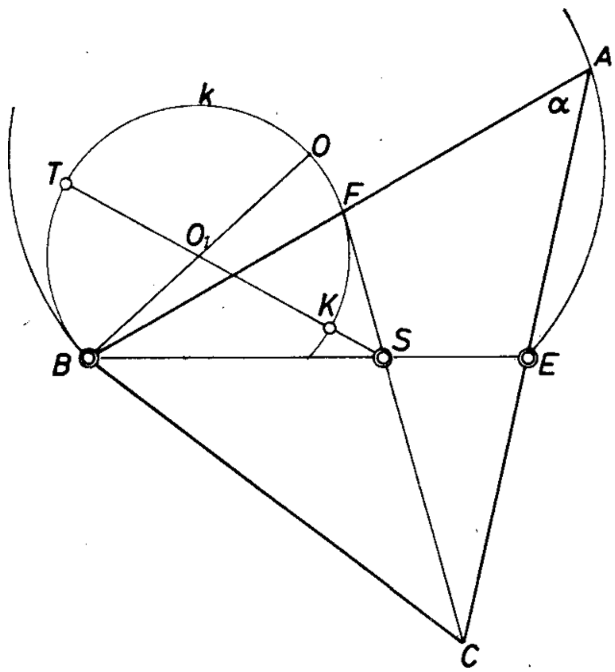
Legyen adott az A csúcsnál levő szög, α. Rögzítsük a BE súlyvonalat és tekintsük egységnyinek. Így a háromszög A csúcsa egy olyan köríven mozoghat, ahonnan BE α szög alatt látszik (1. ábra). Ha az A csúcs a BE íven végigfut, az adott α-val a hasonlóság erejéig minden háromszög létrejön, amelyet vizsgálnunk kell. Mivel $s_b = 1$, az $\dfrac{s_c}{s_b}$ hányados minimuma, ill. maximuma helyett elég s_c minimumát, ill. maximumát vizsgálnunk.



1. ábra

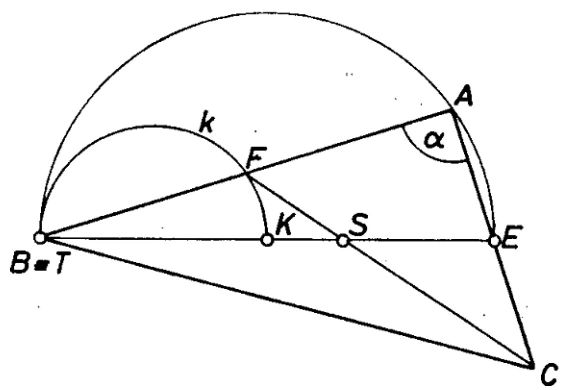
Ha AB minden helyzetében megrajzoljuk ennek felezőpontját, F-et, akkor egy olyan k látószög-körívet kapunk, amely az eredetiből B középpontú, 0,5 arányú kicsinyítéssel származik. Az s_c akkor minimális, ill. maximális, amikor a harmadrésze, SF minimális, ill. maximális, ahol S az ABC háromszög súlypontja. Keressük tehát a k körívnek S-től mért legközelebbi (K), illetve legtávolabbi (T) pontját.

Először foglalkozzunk az 1. ábrán vázolt esettel, azaz amikor α hegyesszög. Ekkor K és T az S pontot k O_1 középpontjával összekötő egyenesen van. A keresett határok, amelyek között s_c (és így jelen esetben $\dfrac{s_c}{s_b}$ is) változhat: $3 \cdot SK$, ill. $3 \cdot ST$.

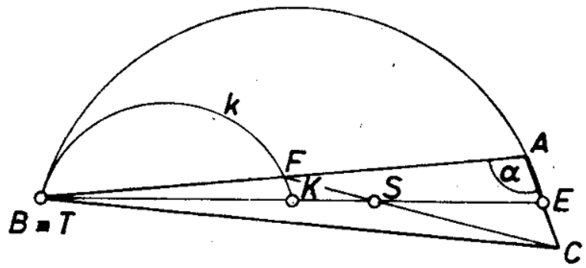
Jelöljük BE látókörének középpontját O-val. Mivel $BE = 1$, azért $O_1B = BO/2 = BE/\,4\sin\alpha = 1/4\sin\alpha$, $BS = 2/3$ és $O_1BS\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$. Az O_1S értékét a koszinusztételből számolhatjuk, és így

$$\left(\frac{s_c}{s_b}\right)_{\min} = 3\,SK = 3(O_1S - O_1B) = \frac{-3 + \sqrt{9 + 16\ \sin^2\alpha}}{4\ \sin\alpha},$$

$$\left(\frac{s_c}{s_b}\right)_{\max} = 3\,ST = 3(O_1S + O_1B) = \frac{3 + \sqrt{9 + 16\ \sin^2\ \alpha}}{4\ \sin\ \alpha}.$$



2. ábra



3. ábra

Ha $\alpha \geq 90^\circ$ (2. és 3. ábra), akkor kS-től mért legközelebbi és legtávolabbi pontja a BE szakaszon van, K a BE felezőpontja, T pedig azonos B-vel. Ekkor $3 \cdot SK = 1/2$, $3 \cdot ST = 2$.

A súlyvonalak aránya tehát most $\frac{1}{2}$ és 2 között változhat. Megjegyezzük hogy az $\frac{1}{2}$ és 2 értékek itt csak elfajuló ABC háromszögekben jöhetnek létre, míg $\alpha < 90^\circ$ esetén az ott kapott szélsőértékek valódi ABC háromszögekben valósulnak meg, s ezek $\frac{1}{2}$-nél kisebb, ill. 2-nél nagyobb értékek. L.L.

Böősi Imre (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn.)