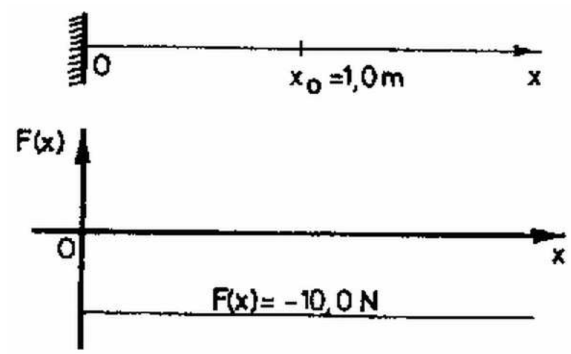
A XIV. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia feladatai

Elméleti feladatok

1. *Egy részecske egydimenziós mozgást végez az OX pozitív féltengely mentén. A részecskére ható $F(x)$ erőt az* ***1.*** *ábra mutatja. Az O origóban egy tökéletesen visszaverő fal van. Ugyanakkor a részecskére mindenhol hat egy súrlódási erő is, amelynek nagysága $F_f = 1{,}00$ N. A részecske az $x = x_0$ pontból indul $E_0 = 10{,}0$ J kinetikus energiával.*

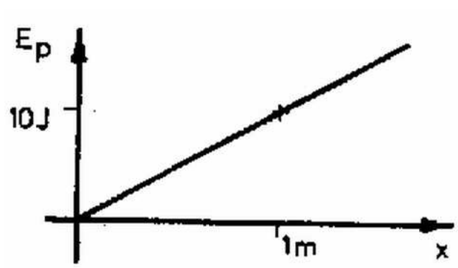


1. ábra

a) *Határozzuk meg, milyen hosszú utat tesz meg a részecske a végleges megállásig!*
b) *Ábrázoljuk grafikusan a részecske $U(x)$ helyzeti energiáját az $F(x)$ erőtérben!*
c) *Ábrázoljuk kvalitatívan a részecske sebességét az x koordináta függvényében!*

Megoldás. *a*) A grafikonról leolvashatjuk, hogy a számunkra érdekes $x > 0$ tartományban az $F(x)$ erő nem függ x-től, tehát egy $F = 10$ N nagyságú, balra ható erőről van szó. $x > 0$ esetén a részecskére ható súrlódási erő kisebb, mint az F erő, ezért a részecske csak az origóban állhat meg véglegesen. A visszaverő falon addig fog pattogni, amíg a helyzeti és mozgási energiája teljes egészében a súrlódási erő ellen végzett munkává alakul, azaz $F_f s = x_0 F + E_0$, ahol s a megállásig megtett út, $x_0 F$ pedig a helyzeti energia megváltozása az indulás és a megállás között. Az egyenletből s-et kifejezve és az adatokat behelyettesítve $s = 20$ m-t kapunk.

b) Állandó erő által létrehozott erőtérben a helyzeti energia $E_P = F_x + c$, ahol c tetszőleges állandó. c-t nullának választva, a keresett grafikon a 2. ábrán látható.



2. ábra

c) Ha a részecske balra mozog, akkor a gyorsulása $a = -(F - F_f)/m$. Ha x'-vel jelöljük azt a helyet, ahonnét balra indul, akkor a helyére és sebességére a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$x = (a/2)t^2 + x'; \quad v = at.$$

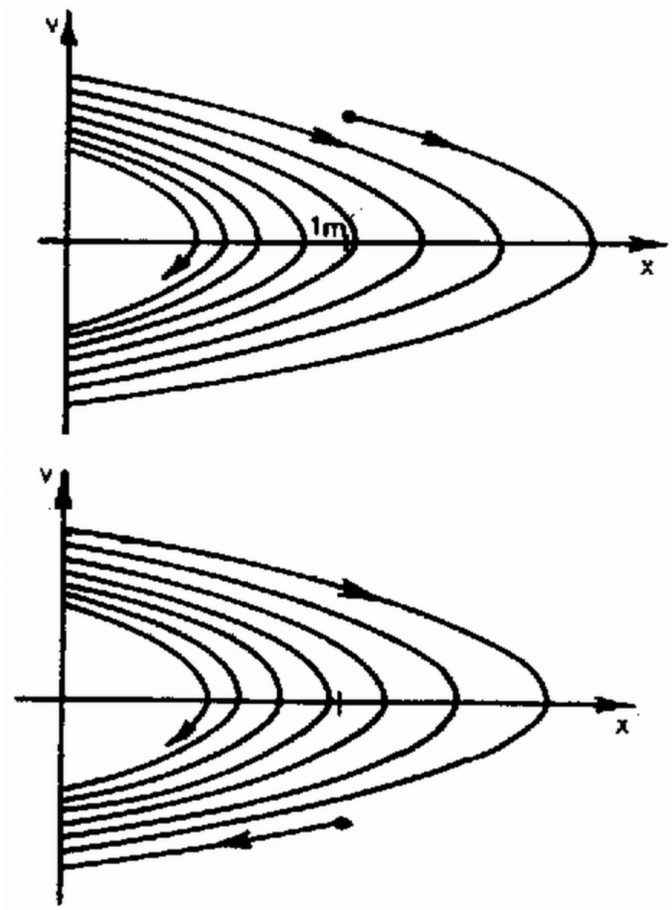
A három egyenletből

$$v = -\sqrt{(x - x')2\,\frac{F_f - F}{m}}. \tag{1}$$

Ha a részecske jobbra mozog, akkor $a = -(F + F_f)/m$. v'-vel jelölve azt a sebességet, amellyel a falról visszapattan, helyének és sebességének egyenlete most $x = (a/2)t^2 + v't$; $v = at + v'$, innen

$$v = \sqrt{(v')^2 - 2\,\frac{F + F_f}{m}x}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) függvények a $\sqrt{x}$ függvény transzformáltjai, tehát paraboladarabok. Attól függően, hogy a testet az x_0 pontból balra vagy jobbra indítjuk, kétféle mozgás lehetséges. A két esetben a keresett $v(x)$ grafikont a 3. ábrán ábrázoltuk kvalitatívan. (8 pont)



3. ábra

2. *A 4. ábra szerinti áramkörben* $L_1 = 10\ \mathrm{mH}$, $L_2 = 20\ \mathrm{mH}$, $C_1 = 10\ \mathrm{nF}$, $C_2 = 5\ \mathrm{nF}$ *és* $R = 100\ \mathrm{k\Omega}$. *A K kapcsoló hosszabb ideje zárva van. Az áramforrás f változtatható frekvenciájú szinuszos áramot ad, de az áramforrás áramerősségének amplitúdója állandó.*

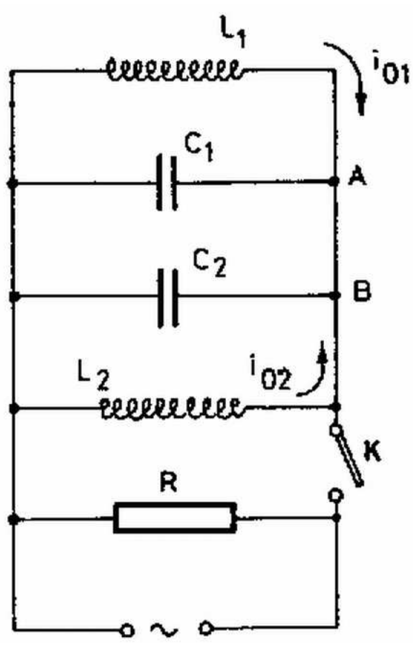
a) *Jelöljük* f_m*-mel a maximális hatásos teljesítményhez (*P_m*-hez) tartozó frekvenciát és* f_+*-szal, ill.* f_-*-szal az* $(1/2)P_m$*-hez tartozó frekvenciákat! Határozzuk meg* f_m*, és* $\Delta f = f_+ - f_-$ *arányát!*

A K kapcsolót kinyitjuk. A kapcsoló nyitása után egy t_0 *pillanatban az* L_1 *és* L_2*-n átfolyó áramerősségek* $i_{01} = 0{,}1\ \mathrm{A}$, $i_{02} = 0{,}2\ \mathrm{A}$ *és a feszültség* $U_0 = 40\ \mathrm{V}$.

b) *Számítsuk ki az áramkör* $L_1C_1C_2L_2$ *része sajátrezgésének a frekvenciáját!*

c) *Határozzuk meg az AB vezetőben az áramerősséget!*

d) *Számítsuk ki az* L_1 *tekercsben az áramerősség rezgésének amplitúdóját!*



4. ábra

Megoldás. *a*) Jelöljük Z-vel az áramkör eredő impedanciáját! A párhuzamos kapcsolás miatt $\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2$, ahol $C = C_1 + C_2$ és $L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$ az eredő kapacitás és induktivitás.

A hatásos teljesítmény:

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{I^2 Z^2}{R} = \frac{I^2}{R} \frac{1}{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}. \tag{1}$$

Ebből látható, hogy P akkor maximális, ha $C\omega - \frac{1}{L\omega} = 0$, azaz a rezgőkör rezonanciában van. Így $f_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Szintén az (1) összefüggésből olvashatjuk le, hogy a teljesítmény akkor lesz a maximális fele, ha $\frac{1}{R^2} = \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2$, azaz

$$\frac{1}{R} = C\omega_+ - \frac{1}{L\omega_+} \quad \text{és} \quad -\frac{1}{R} = C\omega_- \frac{1}{L\omega_-}.$$

Átalakítva:

$$\omega_+ - \omega_- = \frac{1}{RC}, \quad \text{így} \quad \Delta f = \frac{1}{2\pi\, RC}.$$

Az eredmény

$$\frac{f_m}{\Delta f} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 150.$$

b) A megadott adatokkal $L_1C_1 = L_2C_2$, tehát az L_1C_1 és az L_2C_2 rezgőkör ugyanazzal a frekvenciával oszcillál egymástól függetlenül. A sajátrezgés frekvenciája tehát

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_1}} = 15{,}9\ \text{kHz}.$$

c) A két rezgőkör függetlensége miatt az AB ágban nem folyik szinuszos áram. A tekercsek ellenállása egyenárammal szemben zérus, ezért egyenáram folyhat az AB ágban. Jelöljük i_{c_1} és i_{c_2}-vel a t_0 időpillanatban a C_1 kondenzátorból A-ba, ill. a C_2-ből B-be folyó áramerősséget!

$$i_{c_1} = C_1\frac{\Delta U}{\Delta t} \qquad \text{és} \qquad i_{c_2} = C_2\frac{\Delta U}{\Delta t},$$

$$\text{így} \quad i_{c_1} = \frac{C_1}{C_2} i_{c_2}, \quad \text{azaz} \quad i_{c_1} = 2i_{c_2}.$$

Az A és B pontokra a csomóponti törvény:

$$i_{AB} = i_{01} + i_{C_1}; \qquad i_{AB} = -i_{02} - i_{C_2}.$$

Az utóbbi három egyenletből

$$i_{AB} = \frac{i_{01} - 2i_{02}}{3} = -0{,}1\ \text{A}.$$

d) Jelöljük r indexszel azt az áramerősséget, amit a rezgőkör rezgése hoz létre! $i_{01r} = i_{01} - i_{AB} = 0{,}2$ A.

Az L_1C_1 rezgőkörben az energiamegmaradás szerint

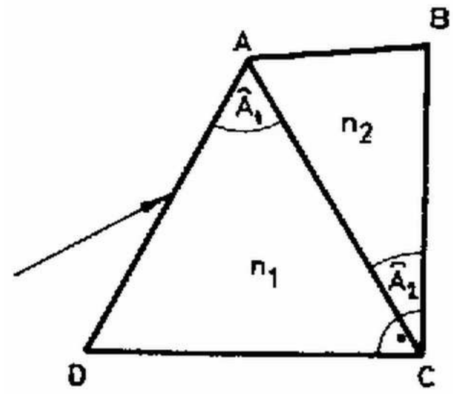
$$L_1\frac{i^2_{1r\,\max}}{2} = L_1\frac{i^2_{01r}}{2} + C_1\frac{U_0^2}{2}.$$

A keresett áramerősséget kifejezve:

$$i_{1r\,\max} = \sqrt{i^2_{01r} + \frac{C_1}{L_1} U_0^2} = 0{,}204\ \text{A}.$$

(8 pont)

3. *Két prizmát, amelyek törőszöge* $\widehat{A}_1 = 60°$, $\widehat{A}_2 = 30°$, *az 5. ábrának megfelelő módon összeragasztottunk* ($\widehat{C} = 90°$)*. A törésmutatókat a következő képletek adják meg:* $n_1 = a_1 + b_1/\lambda^2$; $n_2 = a_2 + b_2/\lambda^2$, ahol $a_1 = 1{,}1$; $b_1 = 10^5\ \text{nm}^2$; $a_2 = 1{,}3$; $b_2 = 5 \cdot 10^4\ \text{nm}^2$.



5. ábra

a) *Határozzuk meg azt a λ_0 hullámhosszat, amelyre bármely irányból érkező fénysugár törés nélkül halad át az AC felületen! Határozzuk meg az ehhez az esethez tartozó n_1 és n_2 törésmutatókat is!*

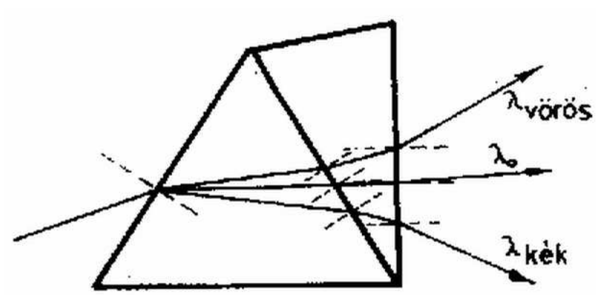
b) *Rajzoljuk meg, hogy hogyan halad át a prizmarendszeren az ábra szerint beérkező, három különböző fénysugár, amelyek hullámhossza $\lambda_{vörös}$, λ_0, és $\lambda_{kék}$! Legyen a fénysugarak beesési szöge azonos!*

c) *Határozzuk meg, hogy a λ_0 hullámhosszú sugárzásra mekkora a prizmarendszer legkisebb eltérítési szöge!*

d) *Határozzuk meg, hogy milyen hullámhosszú sugárzás esetén lehetséges, hogy a DC alappal párhuzamosan belépő fénysugár DC-vel párhuzamos marad a prizmarendszer elhagyása után is!*

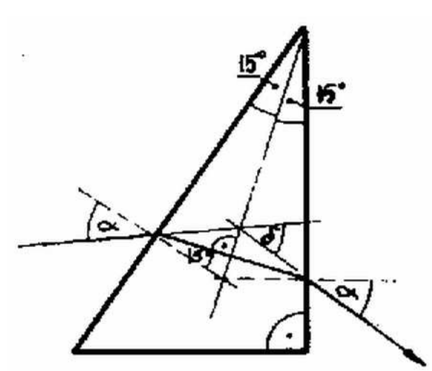
Megoldás. *a)* Az AC felületre különböző irányból érkező λ_0 hullámhosszú fénysugarak akkor nem törnek meg, ha $n_1 = n_2$, azaz $a_1 + b_1/\lambda_0^2 = a_2 + b_2/\lambda_0^2$. Átrendezve $\lambda_0 = \sqrt{\dfrac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}} = 500$ nm. Ekkor $n_1 = n_2 = 1{,}5$.

b) A λ_0-nál nagyobb hullámhosszú vörös fényre n_1 és n_2 is kisebb, mint 1,5, míg a λ_0-nál kisebb hullámhosszú kék fényre mindkét törésmutató nagyobb. Nézzük még meg, hogy az AC felületen hogyan változik a törésmutató. Tudjuk, hogy a λ_0 hullámhosszúságú fényre $n_2/n_1 = 1$. Ha a λ_0 helyett $\lambda_{\text{vörös}}$ hullámhosszú fényt veszünk, akkor $b_1 > b_2$ miatt n_1 jobban csökken, mint n_2, ezért $n_2/n_1 > 1$. Hasonlóan látható, hogy kék fényre $n_2/n_1 < 1$. A fentiek alapján már megrajzolhatjuk a fénysugarak áthaladását a prizmán (6. ábra).



6. ábra

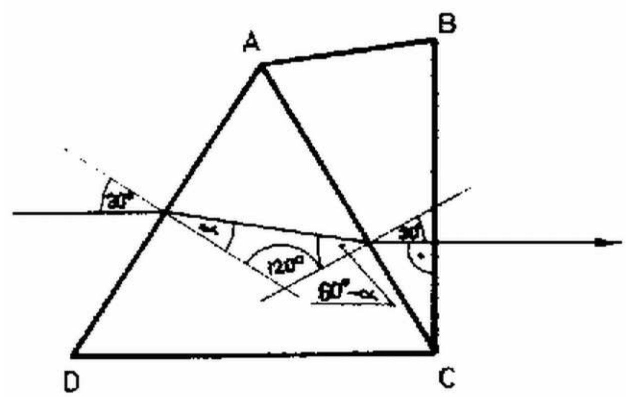
c) A λ_0 hullámhosszú fényre a prizmarendszer úgy viselkedik, mint egy 30°-os törőszögű $n = 1{,}5$ törésmutatójú anyagból készült prizma. Tudjuk, hogy egy prizmán áthaladó fénysugár akkor térül el legkevésbé, ha a prizmán szimmetrikusan halad át, azaz a 7. ábrán α-val jelölt szögek egyenlők.



7. ábra

Ekkor a törési törvény $\frac{\sin\alpha}{\sin 15^\circ} = 1{,}5$, innen $\alpha = 22^\circ\,50'$.

A keresett eltérítési szög: $\delta = 2\alpha - 30^\circ = 15^\circ\,40'$.



8. ábra

d) A 8. ábra alapján a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\frac{\sin 30^\circ}{\sin\alpha} = n, \qquad \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin 30^\circ} = \frac{n_2}{n_1}.$$

A két egyenletből α-t kiküszöbölve: $3n_1^2 = n_2^2 + n_2 + 1$.

Az n_1 re és n_2-re adott összeíüggéseket leírva és átrendezve:

$$(3a_1^2 - a_2^2 - a_2 - 1)\lambda^4 + (6a_1b_1 - b_2 - 2a_2b_2)\lambda^2 +$$
$$+3b_1^2 - b_2^2 = 0.$$

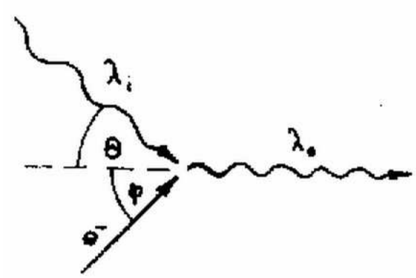
Ez λ^2-re másodfokú egyenlet, aminek megoldása $\lambda = 1{,}18\mu$m. (7 pont)

4. *Egy λ_i hullámhosszúságú foton egy mozgó szabad elektronnal ütközik. Az ütközés következtében az elektron megáll, és egy λ_0 hullámhosszúságú, az előbbi haladási irányához képest $\Theta = 60^\circ$-os szöggel eltérült foton halad tovább. Ezután a foton egy nyugalomban levő szabad elektronnal ütközik és egy $\lambda_f = 1{,}25 - 10^{-10}$ m hullámhosszúságú fotonként halad tovább, mozgásiránya a második ütközés során is $\Theta = 60^\circ$-kal változik meg. Számítsuk ki az első elektron de Broglie hullámhosszát az ütközés előtt! (Planck állandó: $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js, elektrontömeg: $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, fénysebesség: $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s.)*

Megoldás. Az első ütközésre az energiamegmaradás:

(1) $$h\nu_0 = h\nu_i + E_e,$$

ahol ν a foton frekvenciája, és E_e az elektron energiája. Az impulzusmegmaradást a kirepülő λ_0 hullámhosszúságú foton mozgásirányában és arra merőlegesen írjuk fel (9. ábra):



9. ábra

$$\frac{h}{\lambda_0} = \frac{h}{\lambda_i}\cos\Theta + P_e\cos\varphi,$$
$$0 = \frac{h}{\lambda_i}\sin\Theta - P_e\sin\varphi,$$

ahol P_e az elektron impulzusa.

Az utóbbi két egyenletből φ-t kiküszöbölve, és λ helyére c/ν-t írva

$$(2)\qquad (h\nu_0)^2 + (h\nu_i)^2 - 2h^2\nu_0\nu_i\cos\Theta = P_e^2c^2.$$

Felhasználva a

$$(3)\qquad c^2P_e^2 = E_e(E_e + 2m_ec^2)$$

relativisztikus összefüggést, az (1) és (2) egyenletekből:

$$(4)\qquad \nu_0 = -\frac{v_i}{\dfrac{h\nu_i}{m_ec^2}(1-\cos\Theta)-1}.$$

Átalakítva:

$$(5)\qquad \lambda_0 - \lambda_i = -\frac{h}{m_ec}(1-\cos\Theta).$$

A második ütközésre teljesen hasonlóan végezhetjük a számításokat, eredményül a

$$(6)\qquad \lambda_0 - \lambda_f = -\frac{h}{m_ec}(1-\cos\Theta).$$

összefüggést kapjuk. Az (5) és (6) egyenleteket egymásból kivonva $\lambda_i = \lambda_f$-et kapunk. A két ütközés tehát teljesen hasonló. (5) alapján $\lambda_0 = 1{,}238\cdot 10^{-10}$ m.

Az elektron energiáját (1) alapján számíthatjuk ki: $E_e = hc\left(\dfrac{1}{\lambda_0} - \dfrac{1}{\lambda_i}\right) =$ $= 1{,}56\cdot 10^{-17}$ J. A (3) összefüggés felhasználásával $P_e = 28{,}4\cdot 10^{-48}$ kg m/s. A keresett elektronhullámhossz $\lambda_e = h/P_e = 1{,}24\cdot 10^{-10}$ m. (7 pont)

A következő feladattal nem lehetett pontot szerezni a versenyben, helyes megoldásáért különdíjat adtak.

Magyarázzuk meg kvalitatívan, hogy az Olimpia emblémáján látható vízszintes tengelyű hengerre öntött folyadéksugár miért nem hagyja el a hengert a szaggatott vonal irányában, miért folyik a folytonos vonallal jelölt görbe mentén! Ez a tény az úgynevezett Coanda–hatással van kapcsolatban, amelyet 1936-ban Henry Coanda román mérnök szabadalmaztatott. (Az Olimpia emblémáját ld. a szeptemberi számban!)

Kísérleti feladat

Rendelkezésre áll egy áramforrás (amely egy telepből és aráragasztott ellenállásból áll), két feszültségmérő műszer (ezekkel áramerősség nem mérhető) és egy változtatható ellenállás.

a) *Határozzuk meg a lehető legkevesebb áramkör összeállításával az áramforrás elektromotoros erejét! Ehhez a méréshez csak a két voltmérő használható. (A változtatható ellenállás nem.)*

b) *Most csak az egyik voltmérő és a változtatható ellenállás használható. Az előző ponttól független méréssel határozzuk meg az áramforrás elektromotoros erejét, az áramforrás és a voltmérő belső ellenállását!*

Ebből a célból célszerű a mérési eredmények alapján két grafikont készíteni, amelyeknek elméletileg egyenest kell adniuk, és a keresett mennyiségeket ezek segítségével meghatározni.

c) *Adjuk meg a hibaforrásokat! Melyek azok, amelyek leginkább befolyásolják a végeredményt?*

Megoldás. *a*) Készítsünk el két kapcsolást! Először a két feszültségmérőt sorbakötve kapcsoljuk az áramforrásra. Ekkor a műszerek U_1 és U_2 feszültséget mutatnak. A másik kapcsolásban csak az egyik feszültségmérőt kötjük az áramforrásra, és ekkor U_2' feszültséget mérünk. E-vel és r-rel jelölve az áramforrás elektromotoros erejét és belső ellenállását, valamint R_1 és R_2-vel a két műszer belső ellenállását, a következőket írhatjuk fel:

$$\frac{U_1}{E} = \frac{R_1}{R_1+R_2+r},\qquad \frac{U_2}{E} = \frac{R_2}{R_1+R_2+r},\qquad \frac{U_2}{E} = \frac{R_2}{R_2+r}.$$

A három egyenletet rendezve kapjuk a keresett összefüggést:

$$E = \frac{U_1U_2'}{U_2' - U_2}.$$

b) Ismét két kapcsolást készítsünk! Először a feszültségmérőt és a változtatható ellenállást sorosan kötve kapcsoljuk az áramforrásra. Ha R_f-fel, ill. R-rel jelöljük a feszültségmérő, ill. a változtatható ellenállás ellenállását, akkor az Ohm–törvény felhasználásával a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{1}{U} = \frac{R_f + r + R}{ER_f}.$$

Ha a mért U és R értékek alapján az $1/U$-t ábrázoljuk az R függvényében, akkor olyan pontokat kell kapnunk, amelyek egy egyenesre illeszkednek. Az egyenes $p_1 = \dfrac{1}{ER_f}$ meredekségét és az ordinátával való $b = \dfrac{R_f + r}{ER_f}$ metszéspontját leolvashatjuk a grafikonról.

A második kapcsolásban a voltmérőt és a változtatható ellenállást párhuzamosan kötve kapcsoljuk az áramforrásra. Ekkor

$$\frac{1}{U} = \frac{1 + (1/R_f + 1/R)r}{E}.$$

Most tehát ha az $1/R$ függvényében ábrázoljuk az $1/U$-t olyan pontokat kell kapnunk, amelyek a $p_2 = r/E$ meredekségű egyenesre illeszkednek. A p_1, p_2 és b-re felírt összefüggésből a $p_1 p_2 E^2 - bE + 1 = 0$ egyenletet kapjuk, ahonnan

$$E = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4p_1 p_2}}{2p_1 p_2}.$$

p_1, p_2 és b meghatározása után tehát E-t kiszámíthatjuk. A keresett másik két mennyiséget az $R_f = 1/Ep_1$ és $r = Ep_2$ összefüggések alapján kapjuk.

c) A mérés legjelentősebb hibáját a feszültségmérő pontatlansága okozza. Ez a hiba a képletekbe való behelyettesítéskor megsokszorozódik. (20 pont)