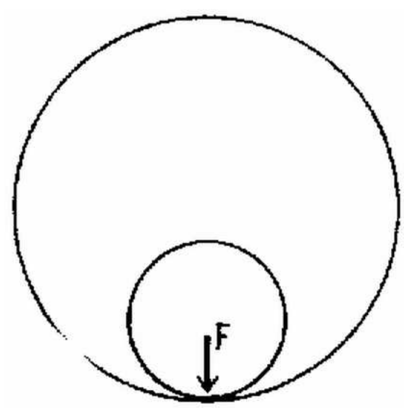
Az 1983. évi középiskolai tanulmányi verseny feladatai

Az I. forduló feladatai

1. *Egy* $m = 8$ kg *tömegű, belül üres, merev falú gömbbe egy másik, ugyancsak* $m = 8$ kg *tömegű tömör, kis gömböt helyezünk (1. ábra). A gömböket levegőben, nagy magasságból leejtjük. A közegellenállási erő arányos a sebesség négyzetével:* $F = kv^2$. *Az arányossági szorzó* m/s *és* newton *esetében* $k = 0{,}1$. *Ábrázoljuk a kis gömb által a nagy gömbre kifejtett erőt a sebesség függvényében!* $g = 10$ m/s^2.

(Légrádi Imre)

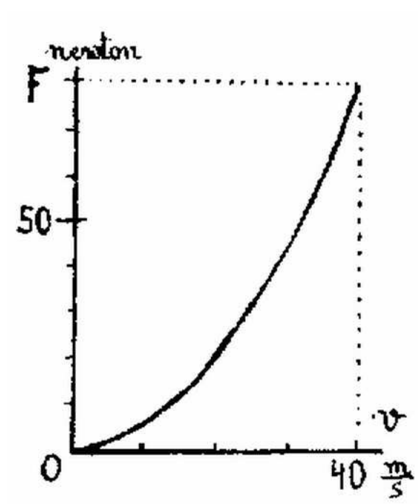


1. ábra

Megoldás. Az összesen 16 kg-ot gyorsító erő $16g - 0{,}1v^2$, a gyorsítandó tömeg 16 kg, tehát a közös gyorsulás $a = g - 0{,}00625v^2$. Az az erő, amellyel a 8 kg tömegű kis golyó a nagyot nyomja (hasonlóan a fonálerőhöz):

$$8g - 8(g - 0{,}00625v^2) = 0{,}05v^2.$$

A görbe parabola.



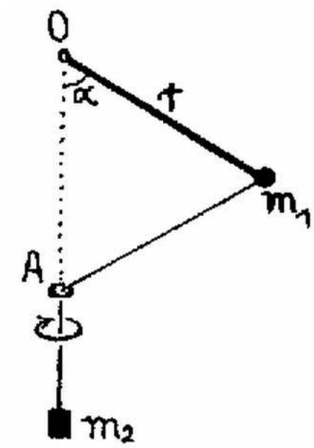
Nulla sebességnél a golyók még éppen együtt esnek, a nyomóerő nulla. Határesetben akkor egyenletes a golyók mozgása, amikor $160 = 0{,}1v^2$, vagyis $v = 40$ m/s. Ekkor a nyomóerő a kis golyó teljes súlya, vagyis 80 newton.

2. *Egy* $r = 0{,}5$ m *hosszú fonálra erősített* $m_1 = 4$ kg *tömegű test vízszintes síkban körpályán kering (2. ábra). Az inga fonala a függőlegessel* $\alpha = 60°$*-os szöget zár be. Az* m_1 *tömegű testhez erősített második fonalat az A-ban elhelyezett gyűrűn vetjük át; ezen a fonálon* $m_2 = 6$ kg *tömegű test lóg.* $OA = r = 0{,}5$ m, $g = 10$ m/s.

a) Mekkora a szögsebesség?

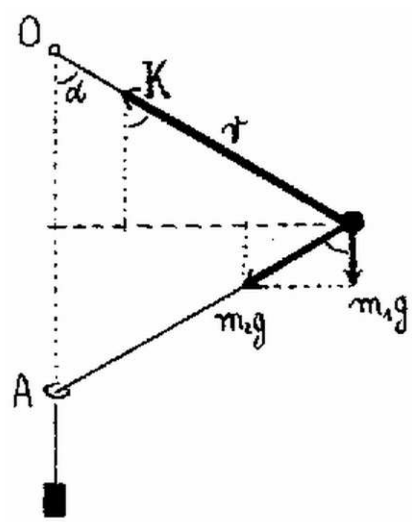
b) Vizsgáljuk meg ezt a helyzetet a stabilitás szempontjából!

(Vermes Miklós)



2. ábra

Megoldás. A felső kötélszárban K erő hat (3. ábra).



3. ábra

Az m_1 tömegű testre ható erők függőleges összetevőinek egyensúlyfeltétele:

$$K \cos \alpha = m_1 g + m_2 g \cos \alpha.$$

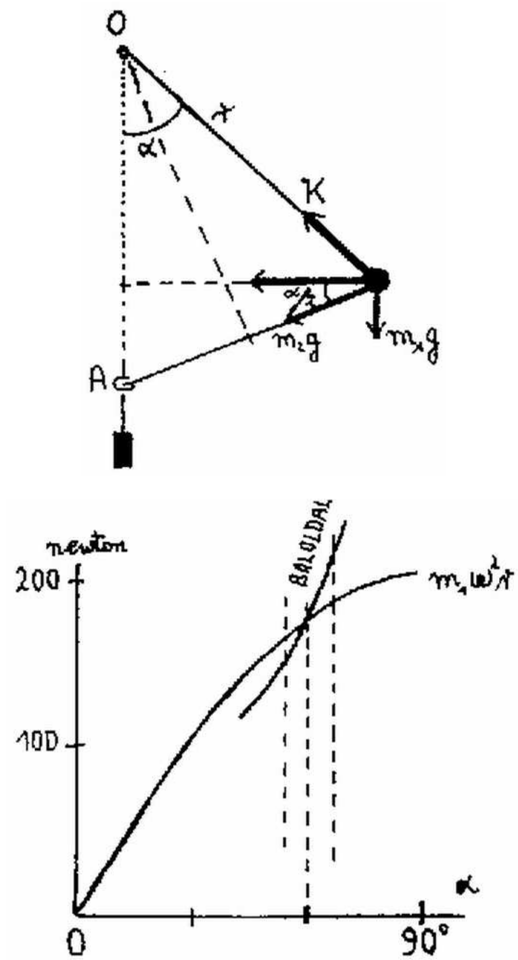
A körmozgáshoz szükséges erőt a vízszintes összetevők összege szolgáltatja:

$$K \sin \alpha + m_2 g \sin \alpha = m_1 \omega^2 r \sin \alpha.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$K = m_2 g + \frac{m_1 g}{\cos \alpha} = 140 \text{ N}, \quad \omega = \sqrt{\frac{2m_2 g}{m_1 r} + \frac{g}{r \cos \alpha}} = 10 \text{ s}^{-1}.$$

A stabilitás megvizsgálása mozgásban levő szerkezet esetében nem olyan egyértelmű, mint a statikában. Meg kell állapodnunk abban, hogy a vizsgálatot milyenfajta zavar esetében végezzük el. Ha a zavar a lelógó fonál meghúzásából ered, akkor a változás közben állandó marad az impulzusnyomaték és erre a feltételre ekkor tekintettel kell lennünk. Nézzük a legegyszerűbb esetet, amikor a szerkezetet egy gépezet állandóan $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$ szögsebességgel tartja forgásban (ekkor az impulzusnyomaték nem marad változatlan). Megvizsgáljuk, hogyan alakul az erők egyensúlya, ha valamilyen külső ok megváltoztatja az α szöget (4. ábra).



4. ábra

Nem speciálisan 60°-os, hanem tetszőleges α szögre végezzük el a számítást. A körmozgáshoz szükséges erő így alakul:

$$K \sin\alpha + m_2 g \cos\frac{\alpha}{2} = m_1\omega^2 r \sin\alpha.$$

A K kötélerőnek akkorának kell lennie, hogy biztosítva legyen a függőleges erőösszetevők egyensúlya is:

$$K \cos\alpha = m_1 g + m_2 g \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Az ebből adódó K-t a körmozgásnál felhasználva következik az egyensúly feltétele:

$$m_1 g \operatorname{tg}\alpha + 2m_2 g \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = m_1\omega^2 r \sin\alpha.$$

A bal oldal menetét feltüntető görbe a jobb oldali szinuszgörbét $\alpha = 60°$-nál metszi, amint azt tudjuk. Az ábra görbéinek menetéből látszik, hogy az egyensúlyi helyzetet elrontva az erők törekvése az eredeti állapot visszaállítása. Ténylegesen elvégezve a kísérletet az m_1 tömegű test kúpingaszerűen keringene.

3. *Egy* 8 dm^2 *alapterületű,* 8 dm *magas henger alakú zárt edényben egy rugó tart a vízen lebegve egy téglatestet (5. ábra a). A téglatest tömege* 2 kg, *alapterülete* 4 dm^2, *magassága* 1 dm. *A rugó eredeti hossza* 3 dm, *rugóállandója* 40 N/dm. *A víz szintje az edény fele magasságában van.* $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

a) Milyen hosszú most a rugó?

b) Milyen hosszú lesz a rugó, ha az edényt megfordítjuk, vagyis A lapja helyett B lapjára állítjuk?

(Vermes Milkós)

Megoldás. Az 5. ábra a esetében a rugó hossza x, megnyúlása $x-3$, felhúzóereje $40(x-3)$. A téglatest bemerülése $d = x + 1 - 4 = x - 3$, a hidrosztatikai felhajtóerő $4(x-3)\varrho g = 40(x-3)$. A téglatest súlya 20 newton. Az erők egyensúlya folytán:

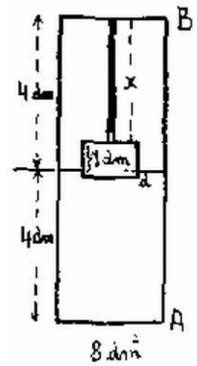
$$20 = 40(x-3) + 40(x-3).$$

Innen a rugó mostani hossza $x = 3{,}25$ dm és a bemerülés $d = 0{,}25$ dm.

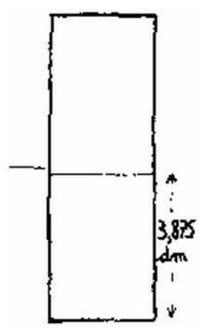
Meg kell állapítanunk a víz mennyiségét:

$$8 \cdot 3{,}75 + 4 \cdot 0{,}25 = 31\ \mathrm{dm}^3.$$

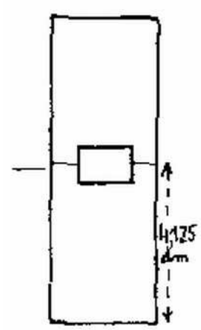
a.



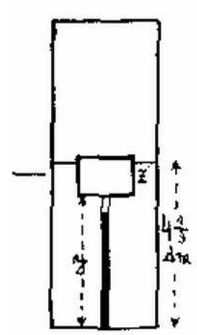
b.



c.



d.



5. ábra

Téglatest nélkül (5. ábra *b*) a víz 3,875 dm magasan állna az edényben. Ha most ráhelyezzük a 0,5 kg/dm^3 sűrűségű téglatestet, az félig bemerülve úszik és a vízmagasság 4,125 dm. *(c.)*

Ha most a téglatestet a fenékhez rögzített rugóhoz erősítjük, akkor a rugó lefelé húzza. Ebben az esetben a rugó hossza y és a bemerülés z *(d.)*. Az erők egyensúlya:

$$20 + 40(y - 3) = 40z.$$

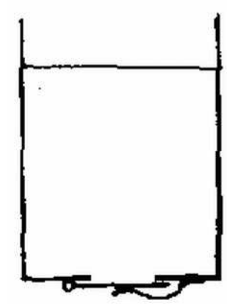
A második egyenletet a vízmennyiség állandósága adja:

$$31 = 8y + 4z.$$

Az egyenletrendszer megoldása:
$y = 3\dfrac{5}{12}$ dm, $z = \dfrac{11}{12}$ dm, azaz a rugó hossza ekkor $3\dfrac{5}{12}$ dm.

4. *Egy tartály fenekén $A = 10\ \mathrm{cm}^2$ nagyságú lyuk van (6. ábra). A lyukhoz egy rugó egy szelepet szorít hozzá, amely csak $F = 6{,}5$ N-nál nagyobb erő esetében nyílik ki. A tartályba $0{,}5$ m magasan vizet öntünk, majd a tartályt függőlegesen rezgő mozgásba hozzuk. A rezgés amplitúdója $r = 0{,}05$ m, körfrekvenciája $\omega = 12\ \mathrm{s}^{-1}$. Milyen magas vízoszlop marad végül is a tartályban? $g = 10\ \mathrm{m/s}^2$.*

(Nagy László)



6. ábra

Megoldás. A vízoszlopnak akkor maximális a gyorsulása, amikor a legalsó helyzetben van:

$$a_m = r\omega^2 = 7{,}2\ \mathrm{m/s}^2.$$

Legalul a szelepet nyomja az x magasságú, ϱ sűrűségű megmaradt vízoszlop súlya és a rezgésből származó erő:

$$Ax\varrho g + r\omega^2 Ax\varrho = Ax\varrho(g + r\omega^2).$$

Ezzel egyenlő a szelepet nyitó erő:

$$F = Ax\varrho(g + r\omega^2).$$

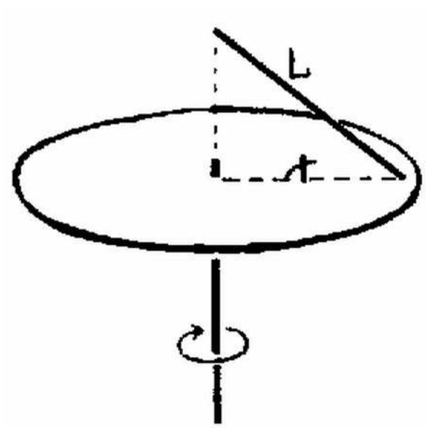
Innen a megmaradó vízoszlop magassága:

$$x = \frac{F}{A\varrho(g + r\omega^2)} = 0{,}38\ \mathrm{m}.$$

A II. forduló feladatai

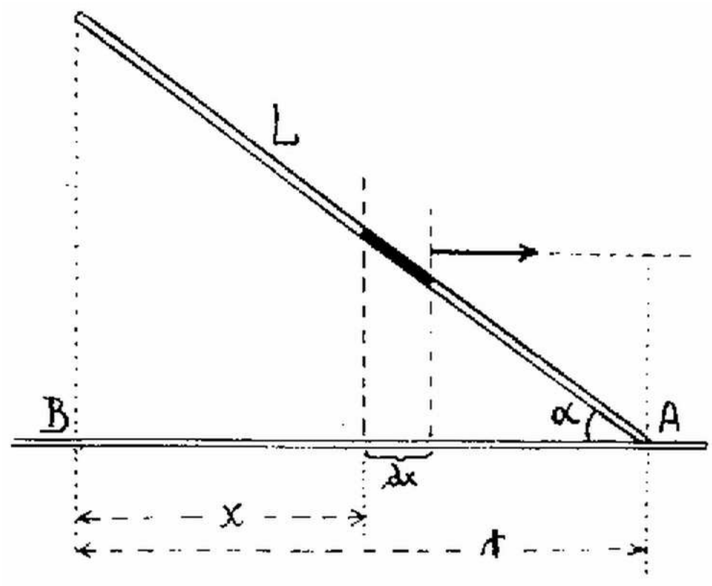
1. *Egy korong állandó szögsebességgel forog függőleges tengelye körül (7. ábra). A korongra egy $L = 1$ m hosszú lécet támasztottunk és ez a koronggal együtt forog. A léc alsó vége $r = 0{,}8$ m-re van a tengelytől, felső vége épp a tengely felett van. Mennyi a korong szögsebessége? $g = 10\ \mathrm{m/s}^2$.*

(Nagy László)



7. ábra

Megoldás. A pálca egységnyi hosszúságú darabjának tömege σ, a dx vetületű, x távolságban levő darabjának tömege $\sigma dx/\cos\alpha$. E rész körmozgásához $\varrho dx \cdot \omega^2 \cdot x/\cos\alpha$ erő szükséges (8. ábra).



8. ábra

Számítsuk ki a forgatónyomatékok egyenlőségét a pálca A alátámasztási pontjára vonatkozóan! A dx vetületű darab forgatónyomatéka:

$$\frac{\sigma dx}{\cos\alpha}\omega^2 x(r-x)\mathrm{tg}\,\alpha.$$

A teljes forgatónyomaték:

$$\int_0^r \frac{\sigma\omega^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha}(rx-x^2)dx = \frac{\sigma\omega^2\,\mathrm{tg}\,\alpha r^3}{6\cos\alpha}.$$

\epsfbox{1983–84–2.eps}*8. ábra*
Az egész pálca tömege $m=\sigma r/\cos\alpha$, ezért a számított forgatónyomaték:

$$\frac{m\omega^2\,\mathrm{tg}\,\alpha r^2}{6}.$$

A súly lebillentő forgatónyomatéka $mgr/2$. Egyenlővé téve:

$$\frac{m\omega^2 r^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{6}=\frac{mgr}{2}.$$

A keresett szögsebesség:

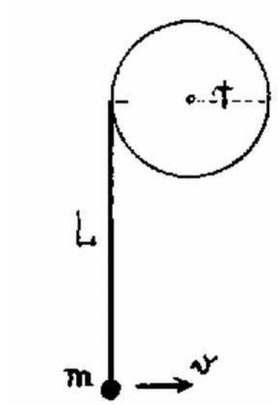
$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{r\,\mathrm{tg}\,\alpha}}=\sqrt{50}=7{,}07\ \mathrm{s}^{-1}.$$

A pálca alsó vége a korongot függőlegesen mg erővel nyomja. A vízszintes erő $mr\omega^2/2$, ami az elemi–rúddarabok centripetális erő szükségletének az összege. Ezek eredőjének, a támaszerőnek a vízszintessel alkotott β szöge: $\mathrm{tg}\,\beta = 2g/r\omega^2$, $\beta = 26{,}57°$. Az α szög 36,87°. A támaszerő iránya nem esik egybe a rúd irányával, nem megy át a rúd súlypontján.

2. *Vízszintes asztallapon* $r=0{,}2$ m *sugarú hengert rögzítettünk. Kerületéhez* $L=0{,}8$ m *hosszú fonalat erősítettünk az érintő irányában (9. ábra). E fonál végén, az asztalon fekve* $m=0{,}6$ kg *tömegű test van, amelyet a fonálra merőlegesen* $v=0{,}4$ m/s *sebességgel elindítunk. A súrlódás elhanyagolható.*

a) Mennyi idő múlva ér az m *tömegű test a hengerhez?*
b) Hogyan függ a fonalat feszítő erő az időtől?

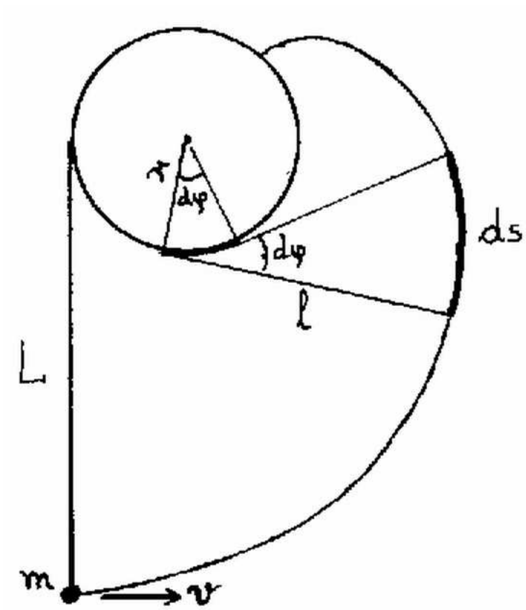
(Dr. Bodó Zoltán)



9. ábra

Megoldás. A sebesség mindig merőleges a fonálra, a fonálerő nem végez munkát, nem képes változtatni a sebességet, a test mindvégig $v = 0{,}4$ m/s sebességgel mozog. Ki kell számítani a pálya (kör–evolvens) hosszát.

A fonál érintési pontjaihoz rajzolt rádiuszok $d\varphi$ szöget zárnak be (10. ábra). A fonál $r \cdot d\varphi$ darabbal lett rövidebb: $dl = -r \cdot d\varphi$.



10. ábra

A pálya hosszának kis eleme: $ds = l \cdot d\varphi$. Kiküszöbölve $d\varphi$-t:

$$ds = -\frac{l}{r} \cdot dl.$$

Az egész út: $s = -\int\limits_L^0 \frac{l}{r} dl = \frac{L^2}{2r} = 1{,}6$ m. A mozgás időtartama:

$$T = \frac{L^2}{2rv} = 4 \text{ s}.$$

A pillanatnyi pályasugár l, a forgási középpont felé mutató erő mv^2/l. Meg kell állapítani hogyan függ l az időtől. Az út kiszámításánál l-től nem 0-ig, hanem egy tetszőleges l-ig integrálunk; ez az út $s = vt$:

$$s = -\int\limits_L^l \frac{l}{r} dl = \frac{1}{2r}(L^2 - l^2) = vt.$$

Ebből

$$l = \sqrt{L^2 - 2rvt}.$$

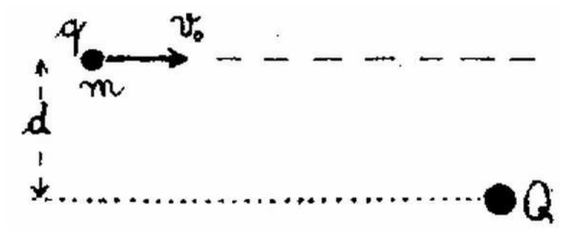
Az erő, mint az idő függvénye:

$$F = \frac{mv^2}{\sqrt{L^2 - 2rvt}} = \frac{0{,}24}{\sqrt{4-t}}.$$

3. *Egy rögzített* $Q = +1Q^{-15}$ C *elektromos töltés felé nagyon messziről* $v_0 = 200$ m/s *sebességgel elindítunk egy* $m = 0{,}01$ g *tömegű,* $q = +10^{-7}$ C *töltésű apró golyócskát egy olyan egyenes mentén, amely* $d = 0{,}1$ m *távolságban van a* Q *töltéstől (11. ábra).*

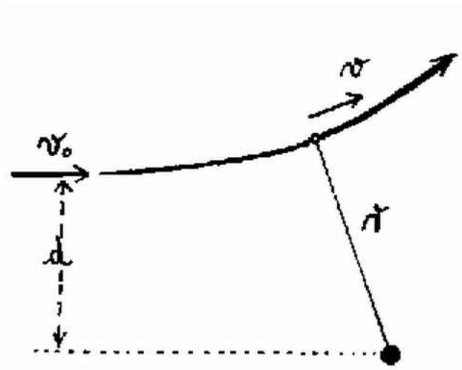
a) Mekkora lesz a két töltés közötti legkisebb távolság?

b) Mekkora legyen a d *távolság, hogy a* q *töltésű test végső sebessége az eredeti* v_0*-ra merőleges legyen?*



11. ábra

Megoldás. A négyzetes erőtörvény következtében a pálya hiperbola (12. ábra).



12. ábra

Az elektromos taszítóerő ellen végzett munka egyenlő a mozgási energia csökkenésével:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{kqQ}{r},$$

k a Coulomb–törvény arányossági szorzója, $k = 9 \cdot 10^9$.

A mozgó töltésre érvényes a területi sebesség állandósága. A területi sebesség induláskor dv_0, a legközelebbi helyzetben rv;

$$dv_0 = rv.$$

v kiküszöbölése után, rendezve:

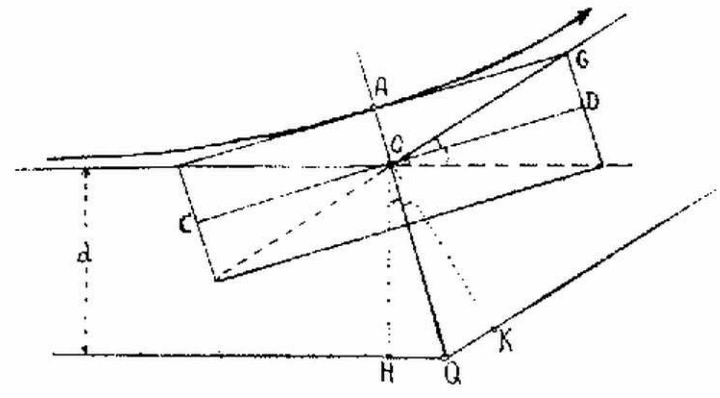
$$\frac{mv_0^2}{2} \cdot r^2 - kqQ \cdot r - \frac{mv_0^2 d^2}{2} = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$r = \frac{kqQ}{mv_0^2} + \sqrt{\left(\frac{kqQ}{mv_0^2}\right)^2 + d^2} = 0{,}125 \text{ m}.$$

Továbbá $v = \dfrac{d}{r} \cdot v_0 = 160$ m/s.

A hiperbola legközelebbi, A pontja a hiperbola csúcspontja (13. ábra). Az AQ egyenesen fekszik a hiperbola O centruma, ahol a kezdeti és végső sebességek irányai, az aszimptoták metszik egymást. AO a hiperbola fél valós tengelye, OQ pedig a fókusztávolsága. OHQ és OGA háromszögek egybevágóak.



13. ábra

Így $OD = OH = d$ a hiperbola fél képzetes tengelye. A fókusztávolság $OQ = \sqrt{AO^2 + d^2}$ a legrövidebb r távolságunk pedig $AO + \sqrt{AO^2 + d^2}$. Ebből következik, hogy bármekkora v_0 indítási sebesség mellett a hiperbola fél képzetes tengelye d, fél valós tengelye pedig

$$AO = \frac{kqQ}{mv_0^2}.$$

Az aszimptoták merőlegességének feltétele, hogy a valós és képzetes tengelyek egyenlők legyenek:

$$\frac{kqQ}{mv_0^2} = d.$$

Ebből a mi számadatainkkal $d = 0{,}0225$ m, $r = 0{,}05432$ m és $v = 82{,}842$ m/s következik.

A III., kísérleti forduló

A versenyzők megismerkedtek a Fresnel–féle zónalemez elméletével és mérőkísérleteket végeztek vele.