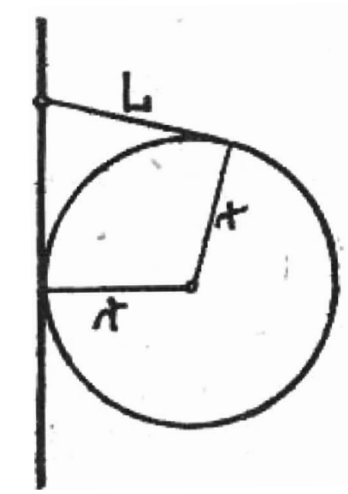
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 1982. október 23-án rendezte 59. versenyét Budapesten és 11 vidéki városban az abban az évben érettségizettek és középiskolások részére. A versenyzők 5 órai munkaidő alatt oldhatták meg a húrom feladatot. Bármely segédeszköz, használata meg volt engedve, beleértve a zsebszámítógépet is. A versenyen 248 dolgozatot adtak be. Ismertetjük a feladatokat és a verseny eredményét.

1. *Egy* $r = 5$ cm *sugarú golyót* $L = 6$ cm *hosszú fonállal egy fal mellé függesztünk.* (1. ábra). *Súrlódás nincs. A golyót úgy tartjuk, hogy a fonál éppen érintője legyen. Ezután a golyót elengedjük.* $g = 10\ \mathrm{m/s}^2$.

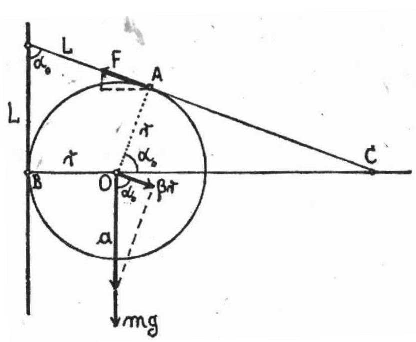


1. ábra

a) *Mekkora szöggyorsulással indul el a golyó?*
b.) *Mekkora a mozgás folyamán a golyó legnagyobb szögsebessége?*

(Vermes Miklós)

Megoldás. a) *kérdés. Első módszer.* A golyó mozgása közben a fonál golyóhoz erősített pontja L sugarú köríven, a golyó középpontja a fallal párhuzamos, r távolságban levő függőleges egyenesen mozog. A mozgást a golyó O középpontja körül történő forgás és középpontjának függőleges süllyedő mozgása összegének tekintjük. A fonálerő F, a súlyerő mg, a középpont süllyedésének függőleges gyorsulása a, a középpont körüli forgás szöggyorsulása β, a középpont körüli tehetetlenségi nyomaték $\Theta = 0,4mr^2$ (2. ábra).



2. ábra

Newton II. törvénye a függőleges irányú erő-összetevőkre vonatkozóan:

$$ma = mg - F\cos\alpha_0.$$

A forgás alaptörvénye szerint:

$$Fr = \beta\Theta.$$

(A súlynak és a fal nyomóerejének nincs forgatónyomatéka az O pontra vonatkozóan.) A gömb A pontjának kerületi gyorsulása az a függőleges gyorsulás vetülete:

$$\beta r = a\cos\alpha_0.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$a = g \cdot \frac{1}{1 + \Theta_0\cos^2\alpha_0/mr^2} = 9,871\ m/s^2.$$

$$F = mg \cdot \frac{\Theta_0\cos\alpha_0/mr^2}{1 + \Theta_0\cos^2\alpha_0/mr^2} = 0,0712\ N.$$

$$\beta = \frac{g}{r} \cdot \frac{\cos\alpha_0}{1+\Theta_0 \cos^2\alpha_0/mr^2} = 35,60\ s^{-2}.$$

Második módszer. Mivel A pont az L sugarú körív érintője mentén, B pont függőlegesen lefelé indul el, ezért az indulás pillanatában a pillanatnyi forgási középpont C. Induláskor a pillanatnyi forgási sugár:

$$OC = \varrho = \frac{r}{\cos\ \alpha_o}.$$

A C pont körüli forgás forgatónyomatéka $mg\varrho = \dfrac{mgr}{\cos\ \alpha_0}$,
a C pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta = \Theta_0 + m\varrho^2 = \Theta_0 + \frac{mr^2}{\cos^2\ \alpha_0}.$$

A C pontban levő forgástengely szempontjából csak az mg súlyerő jelent forgatónyomatékot, amelynek erőkarja ϱ. A forgás törvénye szerint:

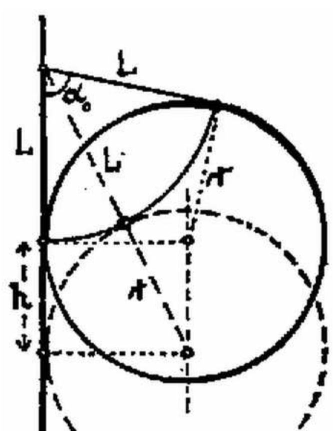
$$\frac{mgr}{\cos^2\ \alpha_0} = \beta\left(\Theta_0 + \frac{mr^2}{\cos^2\ \alpha_0}\right).$$

A keresett szöggyorsulás:

$$\beta = \frac{g}{r} \cdot \frac{\cos\ \alpha_0}{1+\Theta_0\ \cos^2\ \alpha_0/mr^2} = 35{,}60\ \mathrm{s}^{-2}.$$

Egyébként az indulási α_0 szögre levezethető, hogy $\cos\ \alpha_0 = (L^2 - r^2)/(L^2 + +r^2) = 11/61 = 0{,}1803$, $\alpha = 79{,}61°$. A numerikus értékek úgy alakulnak, hogy az eredmény keveset változna, ha a feladat gömb helyett hengerről vagy abroncsról szólna.

b) *kérdés.* A gömb süllyedése közben a helyzeti energia alakul át mozgási energiává. Lényeges körülmény, hogy amikor a gömb eléri legmélyebb helyzetét, vagyis az L fonál és az r sugár egy egyenesbe esnek, akkor a gömb simán forog; ebben a pillanatban nem süllyed és nem rántja meg a fonalat, tehát a helyzeti energia csökkenése teljes egészében a forgás mozgási energiájává alakul (3. ábra).



3. ábra

A súlypont süllyedése:

$$h = \sqrt{(L+r)^2 - r^2} - L = \sqrt{2Lr + L^2} - L = 0{,}038\ \text{méter}.$$

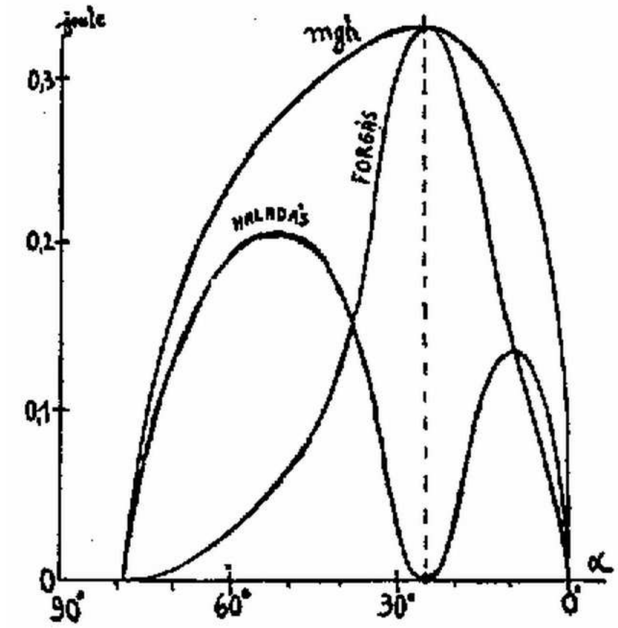
A helyzeti energia csökkenése egyenlő a megszerzett forgási energiával:

$$mgh = \frac{\Theta_0\omega^2}{2}.$$

Innen a keresett szögsebesség:

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{\Theta_0}} = 27{,}56\ \mathrm{s}^{-1}.$$

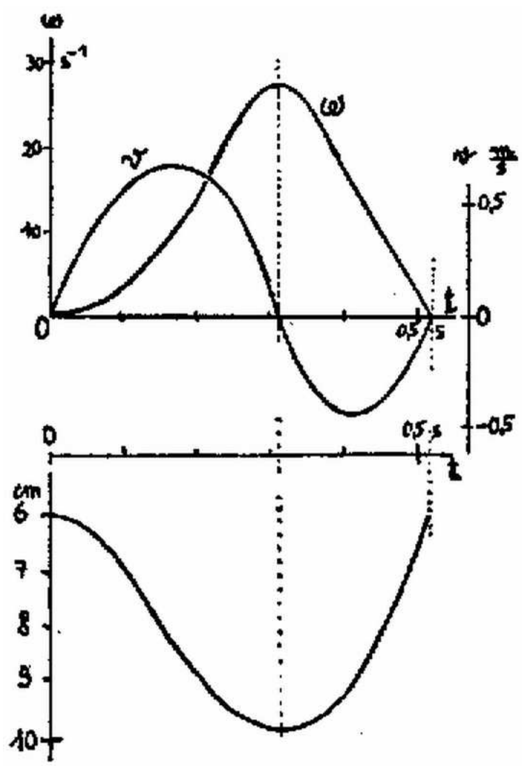
A mechanikai energiamegmaradás törvénye alapján kiszámítható, hogy a nehézségi erő munkavégzése miként alakul át a középpont haladásának és a forgásnak mozgási energiájává. Az eredményt a 4. ábra mutatja.



4. ábra

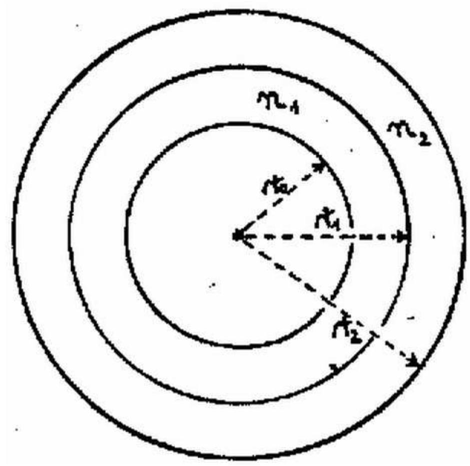
Az $\alpha_0 = 79{,}61^\circ$ indulási helyzetből kiindulva a súlypont legmélyebb helyzetében cos $\alpha = r/(r+L) = 5/11 = 0{,}4545$, $\alpha = 27{,}04^\circ$, ekkor minden mozgási energia a forgás energiájaként jelentkezik. A végső helyzetben, amikor $\alpha = 0$, a súlypont ugyanolyan magasságba kerül, mint ahonnan elindult, de most a fonál a fal mellett van. A haladó mozgás és forgás mozgási energiáinak összege minden helyzetben egyenlő a súlyerő mgh munkavégzésével.

Számítással, számítógéppel pillanatról pillanatra követni lehet a mozgás időbeli lefolyását. A számítás eredményét az 5. ábra mutatja.



5. ábra

Az ábra felső része a sebesség és szögsebesség időbeli lefolyását mutatja. A középpont haladási mozgásának v sebessége egy maximum után $27{,}04^\circ$-nál, a súlypont legmélyebb helyzeténél nulla; ekkor a szögsebesség maximális. Ez körülbelül 0,31 másodperckor következik be. Ezután a súlypont haladási sebessége irányt változtat. Az eredeti magasság kb. 0,52 másodperc múlva következik be. Az ábra alsó része a golyó középpontjának mélységét mutatja az idő függvényében.

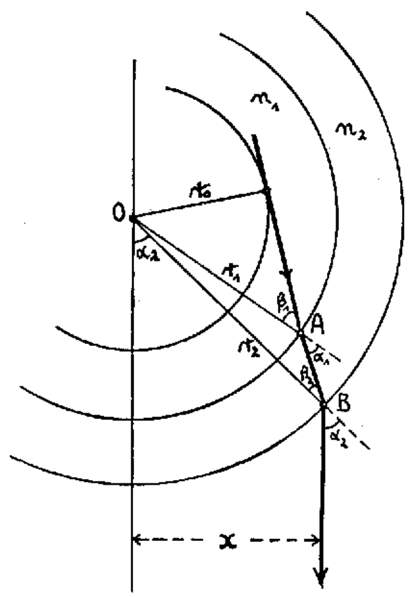


6. ábra

2. *Egy* $r_0 = 6$ cm *sugarú fémhengert két átlátszó hengergyűrű vesz körül koncentrikusan* (6. ábra). *Az elsőnek a sugara* $r_1 = 9$ cm *és törésmutatója* $n_1 = 4/3$, *a másodiknak a sugara* $r_2 = 12$ cm *és törésmutatója* $n_2 = 1{,}5$. *Milyen vastagnak látszik a fémhenger, ha nagy távolságból nézzük az átlátszó rétegeken keresztül?*

(Vermes Miklós)

Megoldás. A nagy távolságból való nézés azt jelenti, hogy a fémhenger mellett érintőlegesen elhaladó fénysugarak párhuzamosan érkeznek szemünkbe (7. ábra).



7. ábra

A fémhenger sugarának látszólagos hossza: $x = r_2 \sin \alpha_2$. A B pontban végbemenő törésnél $\sin \alpha_2 / \sin \beta_2 = n_2$, vagyis a látszólag megvastagodott sugár $x = r_2 n_2 \sin \beta_2$.

Az AOB háromszögben a szinusz–tétel szerint igaz:

$$\frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_1} = \frac{r_1}{r_2},$$

és így $\sin \beta_2 = r_1 \sin \alpha_1 / r_2$.
Ezzel a fémhenger látszólagos rádiusza:

$$x = r_2 n_2 \cdot \frac{r_1 \sin \alpha_1}{r_2} = n_2 r_1\, sin\, \alpha_1.$$

Végül az A pontban végbemenő törésnél $\sin \alpha_1 / \sin \beta_1 = n_1 / n_2$, tehát $\sin \alpha_1 = n_1 \sin \beta_1 / n_2$. A látszólagos rádiusz:

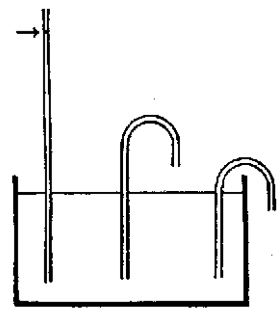
$$x = n_2 r_1 \cdot \frac{n_1 \sin \beta_1}{n_2} = n_1 r_1 \sin \beta_1.$$

A legbelső derékszögű háromszögből $\sin \beta_1 = r_0/r_1$ és így a végeredmény:

$$x = n_1 r_1 \cdot \frac{r_0}{r_1} = n_1 r_0 = 8 \text{ cm}.$$

Mindez akkor érvényes, ha a rádiuszok elég nagyok ahhoz, hogy a megnövekedetten látszó r_0 beléjük férjen.

Nevezetes dolog, hogy az eredmény teljesen független a gyűrűk sugarának nagyságától és csak a legbelső gyűrű törésmutatójától függ. Az eredmény független a törésmutatók nagyságbeli sorrendjétől is. Az eredmény ugyanígy érvényes tetszőleges számú gyűrű esetében is. Ha a legbelső gyűrű levegő, akkor bármilyenek legyenek is a külső gyűrűk, a fémhenger eredeti vastagságában látszik. Mindez kísérletileg könnyen ellenőrizhető.

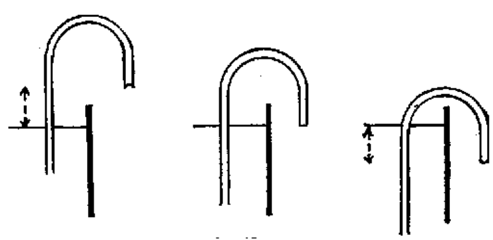


8. ábra

3. *A 8. ábrán látható, folyadékba merülő három kapilláris cső anyaga és keresztmetszete pontosan egyforma. Az első kapillárisban az ábrán látható magasságig emelkedik fel a folyadék. Hogyan viselkedik a folyadék a másik két kapillárisban?*

(Károlyházy Frigyes)

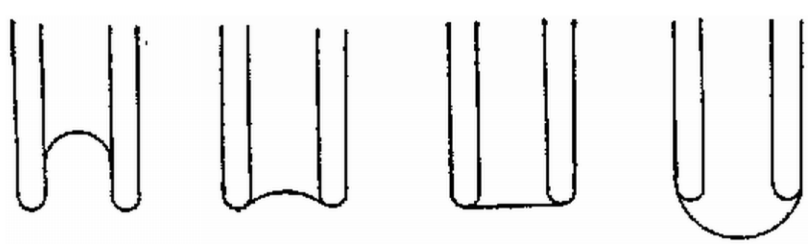
Megoldás. Adott anyagi minőségek és átmérő mellett a felületi feszültség egy adott magasságú folyadékoszlop hidrosztatikai nyomását képes ellensúlyozni. A felületi feszültség által létrehozott nyomás mindig a felszín homorú oldala felé irányul. Amikor a cső folyadékon kívül levő vége az edényben levő folyadékszint felett van, akkor a felszín, a meniszkusz befelé homorú, hogy a felületi feszültségből származó erő felhúzza a folyadékot a cső nyitott végének magasságáig (9. ábra).



9. ábra

Ha a cső külső vége az edény folyadékszintjének magasságában van, akkor a felszín sík, nincs ellensúlyozni való hidrosztatikai nyomáskülönbség. Ha a cső külső vége lejjebb van az edény folyadékszintjénél, akkor a meniszkusz kifelé domború, hogy visszanyomja a folyadékot a hidrosztatikai nyomás ellenében. Természetesen csak akkora hidrosztatikai nyomásokat képes a felületi feszültség kiegyensúlyozni, amelyek a 8. ábra első csövének folyadékszintjéből következőnél kisebbek.

Érdemes az illeszkedési szög problémájával foglalkozni (10. ábra).



10. ábra

Adott folyadék és fal esetében a folyadékfelszínnek a fallal alkotott szöge egy adott érték, amely nem függ a fal helyzetétől. A 10. ábra négy esetet tüntet fel, a függőleges, párhuzamos vonalpárok a cső falait mutatják, legömbölyített végekkel. Az első esetben a szabad csővég az edény folyadékszintje fölött van, a meniszkusz a legnagyobb görbületet, legkisebb rádiuszt mutatja, mert nagy nyomáskülönbség kiegyensúlyozására van szükség. Süllyesztve a szabad csővéget a meniszkusz kevésbé görbült lesz. Egyenlő szintkülönbség esetében a felszín sík. Végül a belső folyadékszint alá süllyesztve a szabad csővéget, a meniszkusz kifelé görbül. De mind a négy esetben a folyadék illeszkedési szöge az üveghez nulla, a víz nedvesíti az üveget.

A verseny eredménye

I. díjat hárman nyertek egyenlő helyezésben: *Csörgő Tamás*, az ELTE fizikus hallgatója, aki Gyöngyösön a Berze Nagy János Gimnáziumban érettségizett mint Kiss Lajos tanítványa, *Erdős László,* a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium III. osztályos tanulója (tanára Koltai Márta) és *Tóth Gábor,* a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium IV. osztályos tanulója (tanára Horváth Gábor). II. díjat nyert *Jeney Tamás* honvéd, aki Miskolcon a Földes Ferenc Gimnáziumban érettségizett mint Zsudel László és Zámborszky Ferenc tanítványa. III. díjat nyertek egyenlő helyezésben: *Károlyi Gyula*, az ELTE matematikus hallgatója, aki Budapesten a Fazekas Mihály Gimnáziumban érettségizett mint Horváth Gábor tanítványa és *Megyesi Gábor*, a szegedi Ságvári Endre Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanára Juhászné Mészáros Mária). Dicséretet hárman kaptak egyenlő helyezésben: *Fodor Zoltán,* az ELTE fizikus hallgatója, aki Budapesten a Teleki Blanka Gimnáziumban érettségizett, tanára Tomcsányi Péter volt, *Mogyorósi András,* a Semmelweis Orvostudományi Egyetem hallgatója, aki Vácott a Sztáron Sándor Gimnáziumban érettségizett mint Skripeczky Gyula és Dániel Gyula tanítványa és *Oszlányi Gábor* honvéd, aki Miskolcon érettségizett a Földes Ferenc Gimnáziumban mint Zámborszky Ferenc tanítványa.