I. megoldás. A megoldás során a következő azonosságokat alkalmazzuk:

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca);$$
$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc=$$
$$=(a+b+c)^3+3abc-3(a+b+c)(ab+bc+ca);$$
$$a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=$$
$$=\left[(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\right]^2-2\left[(ab+bc+ca)^2-2(a+b+c)abc\right].$$

A bizonyítandó azonosság bal és jobb oldalát ekvivalens átalakításokkal közös alakra hozzuk: ebből már tényleg következik a két oldal egyenlősége:

A bal oldal $a+b+c=1$ felhasználásával így alakul:

$$a^4+b^4+c^4=\left[(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\right]^2-2\left[(ab+bc+ca)^2-2(a+b+c)abc\right]=$$
$$=\left[1-2(ab+bc+ca)\right]^2-2\left[(ab+bc+ca)^2-2abc\right]=$$
$$=1-4(ab+bc+ca)+4(ab+bc+ca)^2-2(ab+bc+ca)^2+4abc=$$
$$=1-4(ab+bc+ca)+2(ab+bc+ca)^2+4abc.$$

Míg a jobb oldal:

$$\frac{1}{2}\left[1-2(ab+bc+ca)\right]^2-\left[1-2(ab+bc+ca)\right]+$$
$$+\frac{4}{3}\left[1-3(ab+bc+ca)+3abc\right]+\frac{1}{6}=$$
$$=\frac{1}{2}-2(ab+bc+ca)+2(ab+bc+ca)^2-1+$$
$$+2(ab+bc+ca)+\frac{4}{3}-4(ab+bc+ca)+4abc+\frac{1}{6}=$$
$$=1-4(ab+bc+ca)+2(ab+bc+ca)^2+4abc.$$

Így az eredeti egyenlőség valóban fennáll.

II. megoldás. Mivel $a+b+c=1$, azért amennyiben a bizonyítandó állítás helyett azt mutatjuk meg, hogy az

(2)
$$a^4+b^4+c^4=$$
$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2-(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^2+\frac{4}{3}(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)+$$
$$+\frac{1}{6}(a+b+c)^4$$

összefüggés minden a, b, c számra fennáll, akkor készen vagyunk. Ennek igazolása végett a jobb oldalon mindegyik tagban kifejtjük a többtagúak hatványait:

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2=\frac{1}{2}\left[(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\right],$$
$$-(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^2=$$
$$=-(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2\left[a(b^3+c^3)+b(c^3+a^3)+\right.$$
$$\left.+c(a^3+b^3)+2(a^2bc+ab^2c+abc^2)\right];$$
$$\frac{4}{3}(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)=\frac{4}{3}\left[a^4+b^4+c^4+a(b^3+c^3)+b(c^3+a^3)+c(a^3+b^3)\right];$$
$$\frac{1}{6}(a+b+c)^4=\frac{1}{6}(a^4+b^4+c^4)+6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+$$
$$+4\left[a(b^3+c^3)+b(c^3+a^3)+c(a^3+b^3)+12(a^2bc+ab^2c+abc^2)\right].$$

Ezeket összeadva kapjuk, hogy összegük

$$\left(\frac{1}{2}-1+\frac{4}{3}+\frac{1}{6}\right)(a^4+b^4+c^4)=a^4+b^4+c^4,$$

vagyis (2) valóban áll.

Pálfalvi György (Győr, Révai M. Gimn., IV. o. t.)