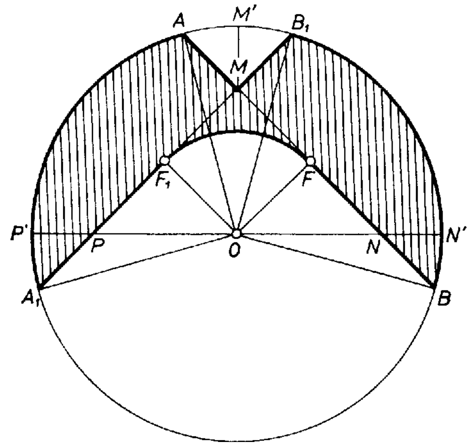
a) Legyen körünk középpontja O, a húr megindulási helyzete AB, véghelyzete A_1B_1 úgy, hogy A halad elöl, vagyis B_1 még A elérése előtt áll meg a rövidebbik BA íven, hiszen ennek középponti szöge $120°$. Legyen AB és A_1B_1 felezőpontja (O-hoz legközelebbi pontja) F, illetve F_1, valamint metszéspontjuk M (1. ábra).



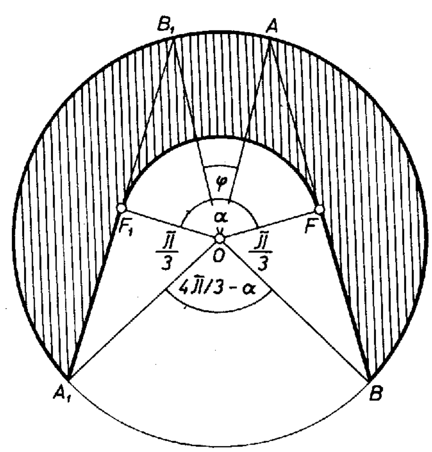
1. ábra

Így a húr az elfordulás folyamán állandóan érinti az O körüli, OF sugarú kör FF_1 negyedívét, és a súrolt S idom határvonalai az A_1F_1, FB, B_1M, MA szakaszok és a BB_1, AA_1, FF_1 negyedkörívek.

Rajzoljuk meg a körnek M-en átmenő sugarát és az OM-re merőleges átmérőjét, legyen a végpontjuk M', illetve N' és P' (a rövidebbik BB_1, illetve AA_1 íven), továbbá messe ON' az AB-t N-ben, OP' az A_1B_1-et P-ben. $90°$-os elfordítással a $BN'N$ és $A_1P'P$ háromcsúcsú idomok átvihetők $B_1M'M$-be, illetve $AM'M$-be, ezért S-nek t területe egyenlő az $FNN'M'P'PF_1F$ vonal határolta idom területével. Ez viszont az OFF_1 negyedkör és az ONF, OPF_1 egyenlő szárú derékszögű háromszögek területével kevesebb az $N'M'P'$ félkör területénél. Mivel az OFA háromszög fele egy egységnyi oldalú szabályos háromszögnek, azért $OF = 1/2$, és így

$$t = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7\pi}{16} - \frac{1}{4} = 1{,}124.$$

b) A talált t alig több a kör területének $1/3$ részénél. Másrészt a súrolt terület az elfordítási szög növelésével monoton nő, ezért az elfordítás szögét növelni kell. Még a fentinél is könnyebb számítás mutatja, hogy S a $120°$-os elfordításnál sem éri el a kör területének felét – még 45%-át sem. Így a keresett α szögre $\alpha > \pi/3$, tehát az első vizsgálat AMB_1 háromcsúcsú része megszűnik. Valamivel egyszerűbb azonban itt abból számolni, hogy a súrolatlan terület is fele a kör területének (2. ábra).



2. ábra

Ez felbontható az OA_1B és OFF_1 körcikkekre, középponti szögük α, illetve $(4\pi/3) - \alpha$ és az OBF, OA_1F_1 háromszögekre, amelyek összeilleszthetők egy egységnyi oldalú szabályos háromszöggé. Így a

$$t = \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3} - \alpha\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{2}$$

követelményből a végzendő elfordítás

$$\alpha = \frac{4\pi + 6\sqrt{3}}{9} = 2{,}551 \text{ radián} = 146°10'.$$