Cél. A determinisztikus mozgástörvényeket megtestesítő differenciálegyenletek azt ígérik, hogy kiszámítható a jövő, azt egyértelműen determinálja a jelen. A populációbiológia szaporodási törvényét is ilyen differenciálegyenlettel modellezték. Ennek a törvénynek a matematikai vizsgálata azonban váratlan és meglepő fordulatra vezetett, melynek elemzése túlnyúlik a biológián, és az egész természet-leírásra vonatkozóan elgondolkodtató tanulságot kínál.

Nyulak élnek egy szigeten. Egy nyúlnak évente C kölyke van. Egy-egy év alatt az $x(t)$ nyúllétszám

$$\frac{dx}{dt} = Cx$$

értékkel változik. A differenciálegyenlet megoldása

$$x(t) = x(0) \cdot e^{Ct},$$

(exponenciális szaporodás). A sziget azonban nem képes akárhány nyulat eltartani, hanem - mondjuk - csak 100 állatot. A telítődő élettér a nyulakban kifejlődött genetikai program szerint a kölykök számának csökkenéséhez vezet. x populációlétszám esetén az élettér $(100 - x)/100$ hányada szabad, a kölykök száma ezzel lesz arányos:

$$C(t) = C \cdot \frac{100 - x(t)}{100},$$

ami a következő differenciálegyenletre vezet:

$$\frac{dx}{dt} = C \cdot \frac{100 - x}{100} x. \tag{1}$$

Ennek megoldása

$$x(t) = \frac{100}{1 + A \cdot e^{-Ct}}.$$

Ez a függvény az $x(0) = (1 + A)^-1$ értékről indul, és $t \to \infty$ esetén növekvőleg az $x(\infty) = 100$ határértékhez simul. A görbét a populációbiológiában logisztikus görbeként ismerik.

De a nyulak nem tanultak integrálszámítást. Az állatok az év bizonyos szakaszában (vagy szakaszaiban) kölykedznek, így a populációlétszám véges lépésekben, generációkban változik.

Játék. Nyulak élnek egy szigeten. Egy nyúlnak generációnként átlagosan K kölyke van. Így a nyúlpopuláció létszámának alakulása évről évre a következő összefüggéssel írható le:

$$x_{n+1} = x_n + K \cdot x_n. \tag{2}$$

A nyúlpopuláció létszáma tehát mértani sorozatként „robban fel” : $x_n = x_0 \cdot (1+K)^n$. De a sziget nem képes akármennyi nyulat eltartani, hordozókapacítása legyen 100 nyúl. Ha kevesebben vannak, szaporodnak. Ha többen, éhen halnak. A nyulak genetikai programja ezt figyelembe veszi, a kölykök száma a nyitva álló élettérrel arányosan változik: tehát

$$x_{n+1} = x_n + \frac{K}{100}(100 - x_n)x_n. \tag{3}$$

Induljunk $x_0 = 2$ nyúllal. A játék elején a játékosok fogadjanak: mekkora legyen K, hogy a nyúlnépesség a leghamarabb elérje az $x = 99$ és 101 közé eső telítődési értéket? (Javasoljuk, hogy a $K = 0{,}5$; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4 értékekkel próbálkozzanak. Ezek „kézenfekvő” értékek, hiszen egy nyúlpárra vonatkozóan ezek adnak egész számú kölyköt.) Induljon el a számolás! Minden versenyző jegyezze fel, hogy hány nyúl lesz az egymást követő generációkban!

Számológép. Programozható számológéppel (PTK-1072, PTK-1050) kényelmesebb a játék. A PTK 1072 gépen az M0 rekeszben lesz a mindenkori nyúllétszám, M1-ben az évszám, M9-ben pedig a kölykök számának századrésze. LD! A gép a következő évi nyúlpopulációt számítja ki elsőként:

$$MR0 + (MR9 * MR0 * (100 - MR0)) = M0,$$

majd M1-hez egyet hozzáad, végül kiírja a nyúllétszámot egészekben, sőt a tizedesponttól jobbra az évek számát is feltünteti:

1 FM+1 NR0 F INT+(.01 ∗ MR1) = R/S GOTO 00

RUN! Évenkénti szaporulat ÷100 az M9-be. Kezdeti nyúllétszám: M0. Indítás: F FP 2, GOTO 00, R/S.

A PTK 1050 esetében a Σ+ statisztikai funkciót használtuk fel az összegzésre és a Pause segítségével jelezzük ki az évek számát. Kezelése: RST, évenkénti szaporulat, R/S, majd az évek és a nyúllétszám leolvasása után újból R/S stb.

Gyakran előfordul, hogy a (3) egyenlet valamelyik esztendő nyúlpopulációjára negatív vagy 0 értéket ad. Tisztán formális szempontból ez nem hiba, a program tovább futna. Hogy ezt elkerüljük, a programba a kijelzés után egy feltételes elágazást iktatunk, amely a negatív vagy 0 létszámú kísértetnépesség továbbszaporítására irányuló törekvésünk hiábavalóságára egy akasztófával (PTK 1072) figyelmeztet. (A negatív szám logaritmusának keresésekor jelentkező, gépbe épített hibajelzést használtuk fel.)

PTK 1050

00	÷	10	STO 0	20	RCL 1	30	2nd x $\geqq$ t
01	1	11	2nd Fix 0	21	$*$	31	GTO 1
02	0	12	2nd Lbl 1	22	RCL 6	32	y^x
03	0	13	1	23	=	33	1
04	=	14	0	24	2nd Σ+	34	=
05	STO 6	15	0	25	2nd Pause		
06	3	16	-	26	1		
07	0	17	RCL 1	27	x=t		
08	STO 1	18	=	28	RCL 1		
09	CLR	19	$*$	29	R/S		

PTK 1072

00	MR	10	(	20	M	30	+	40	R/S
01	0	11	1	21	0	31	(	41	-
02	+	12	0	22	1	32	.	42	1
03	(	13	0	23	F	33	0	43	=
04	MR	14	-	24	M+	34	1	44	SKIP
05	9	15	MR	25	1	35	$*$	45	GOTO
06	$*$	16	0 -	26	MR	36	MR	46	0
07	MR	17	)	27	0	37	1	47	0
08	0	18	)	28	F	38	)	48	LN
09	$*$	19	=	29	INT	39	=		

Számítógép még gyorsabb, sőt a képernyőre fel is rajzolja a nyúlnépesség alakulását.

```
10   PRINT "MEKKORA LEGYEN K";
20   INPUT K
30   CLS
40   LET X=2
50   FOR T=1 TO 60
60   LET X=X+. 01 * K * X * (100 - X)
70   IF X < 0 THEN 120
80   PLOT T,X/4
90   PRINT AT 0,0;T; "GENERACIO TELT EL"
100  NEXT T
110  GOTO 10
120  PRINT AT 2,0; "KIHALTAK A NYULAK"
130  GOTO 10
```

A K értékét érdemes egymás után a következőknek választani:

$K = 0{,}5,\ 1,\ 1{,}5,\ 1{,}7,\ 1{,}99$	konvergencia
$K = 2{,}2,\ 2{,}4$	bifurkácio
$K = 2{,}5$	4-szeres bifurkácio
$K = 2{,}7,\ 2{,}8,\ 2{,}99$	káosz
$K = 3{,}01$	kihalás.

Matematika. Mennyi lehet

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\ ?$$

Pontosabban, van-e az

$$x_{n+1} = (x_0)^{x_n} \tag{4}$$

iterációs képlettel meghatározott sorozatnak határértéke a $n \to \infty$ esetén? Kalkulátor és számítógép egyaránt mutatja, hogy 1,4446 felett a sorozat divergál, az alatt pedig konvergál. Amint x_0 csökkenni kezd, mégpedig jóval 1 alá, a határértéket nem monoton közelíti meg a sorozat, hanem oszcillácion át (csillapított határciklus), de a határérték létezik. Érdekes és váratlan dolgot tapasztalunk azonban $x_0 < 0{,}066$ esetén. Nincs határérték, hanem elég sok lépés után az egymást követő x_n értékek két szám, a és b között ugrálnak (csillapítatlan határciklus).[1] Ha $x_0 \to +0$, akkor $a \to 1$ és $b \to 0$. A határérték eme villaszerű szétágazását a „vezérlő paraméter” (esetünkben x_0) egy bizonyos értékétől kezdve, a villa latin nevéről *bifurkációnak* nevezik. A (4) sorozat az egyszerű bifurkáció tipikus példája.

[1]Ezzel a sorozattal foglalkozott a P. 270. Probléma, KÖMAL, 57. kötet (1978), 153-155. oldal, 59. kötet (1979), 205-216. oldal.-Szerk.

A matematikusok - a struktúrák kialakulásának törvényei után kutatva - élénken érdeklődnek a sorozatok ilyen viselkedése iránt. Különösen érdekes az

$$y_{n+1} = r \cdot y_n \cdot (1 - y_n) \tag{5}$$

összefüggéssel definiált sorozatok viselkedése: ezeknél végtelen sokszor tapasztalható újabb és újabb bifurkáció. Az (5) egyenlet pedig az

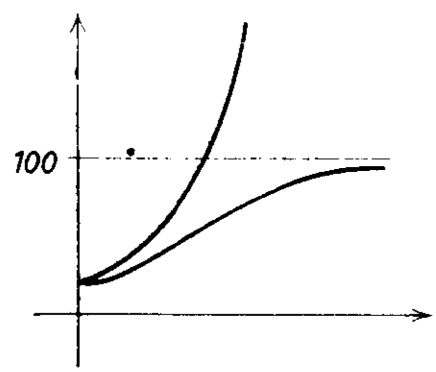
$$x = 100\frac{1+K}{K}y, \qquad r = 1 + K$$

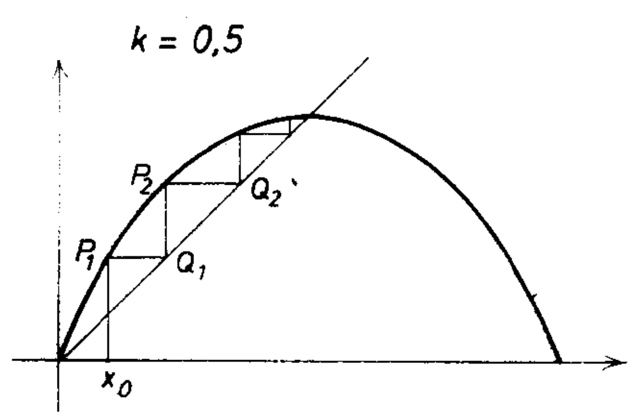
az kapcsolatban van a mi nyulaink (3) egyenletével! A $K = r - 1$ vezérlő paraméter $K < 2$ értékére a sorozat konvergál. $K_1 = 2$ és $K_2 = \sqrt{6}$ közt bifurkál: nagy n-ekre a sorozat tagjai két érték közt ugrálnak (egyszeres periódusú csillapítatlan határciklus). $K_2 = \sqrt{6}$ értéknél újabb bifurkáció történik (kétszeres periódusú határciklus: ugrálás 4 érték között), $K_3 = 2{,}564407\ldots$-nél újabb bifurkáció történik (három különböző frekvenciájú határciklus, ugrálás 8 érték között). $K_4 = 2{,}568799\ldots$ felett 2^4 érték egyetlen határérték helyett, $K_5 = 2{,}569691\ldots$ felett 2^5 érték, $K_6 = 2{,}569891\ldots$ felett 2^6 érték stb. Ezen túl azt mondhatjuk, hogy $K_{r-1} = K_\infty - A/\delta^r$ és $K_r = K_\infty - A/\delta^{r+1}$ közt 2^r érték közt ugrál a nyúllétszám (esetünkben $A = 2{,}6326\ldots$ és $\delta = 4{,}6692\ldots$). Végül $K_\infty = 2{,}569945651\ldots$ fölött végtelen sok érték közt ugrál a létszám, végtelen sok periódus van jelen egyszerre, ami a periodicitás megszűnését jelenti. Ezt nevezik káosznak.

Akik nem olvasnak matematikai folyóiratokat, gyanútlanul számolnak kalkulátoraikkal. A $K = 3$ vagy $K = 4$ értéket választók győzelmét veszik biztosra. (Különösen akkor, ha megtanították őket az (1) egyenletet megoldó logisztikus görbére. Minél nagyobb a K annál meredekebben közelíti, annál hamarább belesímul a megoldás az $x = 100$ határértékbe.) Mi azonban grafikusan is tájékozódhatunk a megoldásuk jellege felől!

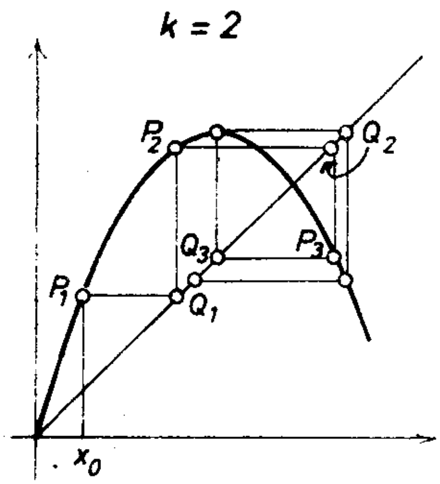
Rajzoljuk fel az $y = x + \frac{K}{100}x(100 - x)$ parabolát! A parabola az $x = 0$ és az $x = 100(1 + K^{-1})$ helyeken metszi az x-tengelyt, nyílása lefelé van, csúcsának koordinátái $x = 50(1 + K^{-1})$ és $y = 25K^{-1}(1 + K)^2$. Húzzuk meg az $y = x$ egyenest is! A két vonal az $x = y = 0$ és az $x = y = 100$ pontokban metszi egymást.

A populáció akkor állandó, ha $x_{n+1} = x_n$, azaz ha $y = x$. Ez megvalósulhat, ha $x = 0$ (nincs nyúl) vagy ha $x = 100$ (zérus növekedés a telítési értéken). Az üres sziget ($x = 0$) instabil megoldás, már két nyúl betelepítése ($x_0 = 2$) is rohamosan szaporodó népességhez vezet.

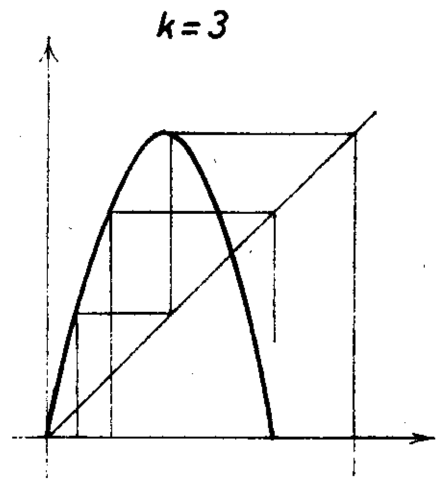




Legyen elsőként $K = 0{,}5$. Jelöljük be az x_0 pontot! Innen húzzunk függőlegest a parabolához, a metszéspont legyen P_1. Ekkor P_1 ordinátája x_1. Húzzunk innen vízszintest az egyeneshez (Q_1), ennek a pontnak az abszcisszája x_1. Így ha ebből húzunk függőlegest a parabolához, megkapjuk az x_2 ordinátájú P_2 pontot. P_2-ből menjünk vízszintesen az egyeneshez (Q_2), e pont ordinátája x_2, de a felette levő P_3 parabolapont ordinátája már x_3, és így tovább. A parabola és az egyenes közt függőleges-vízszintes cikk-cakkban haladva olyan pontsorozatot kapunk, melyek abszcisszaértékei az egymás után következő évek nyúllétszámát adják. $K = 0{,}5$ esetén nyilvánvaló, hogy ez a létszám az $x_\infty = 100$ értékhez konvergál, amint azt vártuk.



Ha ugyanezt a szerkesztést $K = 2$ esetén is elvégezzük, akkor a P_n pontok már nem monoton konvergálnak az $x = y = 100$ megoldáshoz, hanem túllőnek a célon. A túlszaporodást meredek visszaesés követi. A populáció oszcillálni kezd két stabil érték között. (A nyulaknál ez a jelenség kevésbé lép fel, de a földművelők jól ismerik a mezei pocokban vagy a cserebogárban gazdag és szegény évek változását.) A $K \geqq 2$ körül fellépő jelenség neve: határciklus.



$K \approx 3$ esetén még drámaibb a populáció sorsa. A P_n pontok vadul ugrálnak fel és le. Az is előfordulhat, hogy $x \leqq 0$ adódik (a populáció kihal). A matematikában ezt a jelenséget nevezik káosznak. (Az önmaguk táplálékát letaroló sáskajárások éhhalál-katasztrófáiról mindnyájan hallottunk.)

Tanulság. Végeredményben a $K \leqq 2$ értéket választó diák nyer. $K > 2$ értékre a numerikus számítás eredménye alapvetően különbözik a differenciálegyenlet-modell sima logisztikus görbéjétől. Mi lehet ennek az oka? Az (1) differenciálegyenletet

$$x(t + \Delta t) = x(t) + C \cdot \Delta t \cdot x(t) \cdot \frac{100 - x(t)}{100}$$

alakba írva és a (3) iterációs képlettel összehasonlítva látható, hogy $K = C \cdot \Delta t$. Ha $\Delta t \to 0$, ha tehát $x(t)$ minden pillanatban reagál az élettér telítettségére, a $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ szaporodási sebességet az élettér pillanatnyilag érvényes $(100 - x)/100$ telítettsége befolyásolja. Ilyen érzékeny (differenciált) módon simán elérhető a telítési érték.

Az állatok viszont véges Δt időközönként szaporodnak. Hogy a Δt időszak végén hány kölyök lesz, azt a Δt időszak elején levő létszám szabja meg. Ha $K = C \cdot \Delta t$ történetesen nagy szám (sáskák), akkor az x_n értéket követő x_{n+1} egyedszám már túllő a célon, aminek a populáció kaotikus viselkedése lesz az eredménye.

Hasonló jelenség a matematikában és a természetben gyakran előfordul. A tanulságok innen is kézenfekvők:

a) Differenciálegyenlet (pl. a Newton-féle mozgásegyenlet) numerikus megoldásánál túlságosan nagy Δt lépések hamis eredményre vezethetnek.

b) Erős ütemű mozgás, szaporodás, fejlődés csak akkor engedhető meg (pl. populációdinamikában vagy közgazdaságtanban), ha a mindenkori hordozóképességet rövid időközönként, szinte pillanatról pillanatra érzékeljük, és reagálunk rá. Hosszú reakcióidő és durván nagy reakcióválasz káoszhoz vezethet.

c) Ha hosszú a Δt reakcióidőnk (pl. az autóvezető alkoholt fogyasztott), akkor egy közlekedési helyzetre olyan sokára fogunk reagálni, hogy az addigra egészen más lesz. Az eredmény: karambol. Ha valaki Δt-t nagyra választja, akkor C-nek kell kicsinek lennie, mert csak így biztosítható $K = C \cdot \Delta t < 2$. Autó helyett ajánlatosabb gyalog menni !

d) Az élet többi területére vonatkozó tanulságot mindenki maga fogalmazhatja meg.

Irodalom: Marx György-Tóth Eszter: Modellek a természettudományos nevelésben. Fizikai Szemle 31(1981)349. old.
Marx György: Simulation Games in Science Education, Europeanan Journal of Science Education (1983)
R. Hofstadter: Metamagical Themas. Scientific American 245(1981)
Nohum Joel, Párizs, szóbeli közlés.