Az 1982–83. tanévi
Országos Középiskolai Matematikai Verseny

Első (iskolai) forduló
feladatai

1. Egységnyi oldalú négyzet két szomszédos oldalára – mint alapokra – befelé egyenlő oldalú háromszögeket rajzolunk. Mekkora a két háromszög közös részének területe? (7 pont)

2. Melyik az a (tízes számrendszerbeli) kétjegyű szám, amelynek négyzetéből levonva a számjegyeinek felcserélésével nyert kétjegyű szám négyzetét, pozitív négyzetszámot kapunk? (9 pont)

3. Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív egész számot jelöl, akkor az

$$S=-1+2^2-2^4+2^6-+\ldots-2^{8n-4}+2^{8n-2}$$

összeg osztható 51-gyel! (9 pont)

4. Jelentsen a az 1-től különböző pozitív (valós) számot! Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{a^x}{a^x-1}>\frac{1+a^{-x}}{1-2a^{-x}} \tag{1}$$

egyenlőtlenséget! (10 pont)

5. Adjuk meg a természetes számok halmazának három olyan részhalmazát, amelyekre teljesül, hogy bármely kettőnek közös része végtelen sok elemet tartalmaz, de a három halmaz közös része üres! (12 pont)

6. Jelölje k_n az egységsugarú körbe írt 2^{n+1} oldalú szabályos sokszög kerületét, K_n pedig az egységsugarú kör köré írt 2^{n+1} oldalú szabályos sokszög kerületét! Igazoljuk, hogy

$$K_{n+1}-k_{n+1}<\frac{K_n-k_n}{2}.$$

(12 pont)

7. Húzzunk tetszés szerinti szelőt az ABC háromszögbe írt kör O középpontján keresztül! Bizonyítsuk be, hogy ez a szelő olyan háromszöget vág le az eredeti ABC háromszögből, amelynek területe: $t\geq 2r^2$, ahol r az ABC háromszögbe írt kör sugarát jelöli! Mely esetben érvényes az egyenlőség jele? (16 pont)

8. Bizonyítsuk be, hogy ha k és n tetszőleges pozitív egész számokat jelentenek, akkor

$$\min\left(k^{1/n},\, n^{1/k}\right)\leq 3^{1/3}.$$

Megjegyzés: $\min\left(k^{1/n},\, n^{1/k}\right)$ jelenti a $k^{1/n}$ és $n^{1/k}$ számok közül a kisebbet (nem nagyobbat). (18 pont)

Második (döntő) forduló

Az alaptanterv szerint tanuló gimnáziumi, valamint a szakközépiskolák III. és IV. osztályos tanulóinak:.

1. Jelentsen k pozitív egész számot! Bizonyítsa be, hogy ha 1-től 10^k-ig összeadjuk az 5-tel nem osztható pozitív egész számokat, akkor összegül nem kaphatunk négyzetszámot!

2. A síkbeli derékszögű koordináta–rendszerben adottak a következő pontok: $A(1;\,2)$, $B(7;\,3)$, $C(5;\,8)$, $D(3;\,7)$ és $E(6;\,6)$. Mely P pontra lesz a lehető legkisebb a $PA+PB+PC+PD+PE$ összeg, ha a koordináta–rendszer bármely pontjából *csak a koordináta tengelyekkel párhuzamos irányokban mozogva* lehet eljutni egy másik pontba?

3. A kör AB és AC húrja egyenlő egymással. Szerkessze meg a körnek azokat a húrjait, amelyeket az AB, AC húrok három egyenlő részre osztanak!

A gimnáziumok matematika II. tantervű III–IV. osztályos tanulói számára:

1. Válasszuk meg úgy az ABC háromszög P belső pontját, hogy $PAC\sphericalangle=PBC\sphericalangle$ teljesüljön. Legyen X a P-ből az AC-re, Y a P-ből a BC-re állított merőleges talppontja. Bizonyítsuk be, hogy van olyan pont, amelyen az XY szakasz felező merőlegese P minden megengedett helyzete esetén átmegy!

2. Egy téglatest alakú ládát $1\times 2\times 4$-es méretű téglákkal teljesen megtöltöttünk. Bizonyítsuk be, hogy az összes tégla úgy is berakható a ládába, hogy az egyenlő hosszúságú élek mind párhuzamosak!

3. EGYIK és MÁSIK játéka a következő: addig dobnak fel ismételten egy szabályos kockát, amíg vagy két 6-os jön ki egymás után, vagy van 10 egymást követő olyan dobás, amelyek között nincs 6-os. Előbbi esetben EGYIK, utóbbiban MÁSIK a nyertes. Kinek kedvez a játék?

A matematikát fakultatív keretben tanuló gimnáziumi III–IV. osztályos tanulóknak

1. Értelmezzük a pozitív valós számok halmazán a következő két műveletet:

$$x \circ y = x + y + xy \text{ és } x * y = \frac{x^2 + y^2}{2xy}.$$

Igazoljuk, hogy

a) bármely x, y, z esetén $(x \circ y) \, o \, z = x \, o \, (y \circ z)$;

b) bármely $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ számra $(x_1 * y_1) \circ (x_2 * y_2) \circ \ldots \circ (x_n * y_n) \geq 2^n - 1$, ahol $n \geq 1$ természetes szám.

2. Megegyezik a matematika II. tantervű verseny 1. feladatával.

3. A sík minden rácspontját (amelynek koordinátái egész számok) fessük be hat szín valamelyikével!

Bizonyítsuk be, hogy bármely színezéshez található olyan téglalap, amelynek csúcsai azonos színű rácspontok és oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel!