Az 1983. évi
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny feladatai

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

I. forduló

1. Öt gyerek az alábbi kijelentéseket teszi:

Emil: Fiútestvérem hegedül.
Anna: Pontosan két testvérem van.
Feri: Nincs fiútestvérem.
Lili: Fiútestvérem első az osztályban.
Peti: Leánytestvérem szereti a matematikát.

Feltéve, hogy mindenki igazat mondott, és az állítások az öt gyerekre vonatkoznak, állapítsuk meg, hogy közülük kik testvérek! (6 pont)

2. Melyek azok az egész számok, melyekre teljesül, hogy

$$\left|\frac{2}{x-13}\right| > \frac{8}{9}.$$

(6 pont)

3. Mennyi maradékot kapunk, ha 7^{1983}-at 8-cal elosztjuk? (6 pont)

4. Keressük meg az összes olyan természetes számot, amely a tízes számrendszerben négyjegyű, jegyei rendre a, b, c, d $(a \neq 0)$, továbbá $a+c=b$, $b=d^2$, $3ab-cd=ad$. (8 pont)

5. Egy vasútállomásról délelőtt pontosan valahány óra valahány (egész) perckor elindul egy vonat. 8 km megtétele után a mozdonyvezető az órájára néz és azt veszi észre, hogy a nagy- és kismutató éppen fedi egymást. A vonat átlagsebessége 33 km/óra volt. Mikor indult el a vonat az állomásról? (8 pont)

6. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AC \neq AB$. A háromszög M magasságpontját kössük össze a BC oldal F felezőpontjával. Az MF egyenes messe a háromszög körülírt körét a D és B pontokban. Bizonyítsuk be, hogy az ADM, illetve, AEM szögek egyike mindig derékszög. (8 pont)

7. Az AB szakasz mint átmérő fölé írt félköríven jelöljünk ki egy C és egy D pontot úgy, hogy az A, B, C, D pontok különbözőek legyenek és a sorrendjük a köríven A, D, C, B. Az AC és BD szakaszok metszéspontja legyen M, a D, ill. C pontban a körhöz húzott érintők metszéspontja pedig N. Bizonyítsuk be, hogy az M és N pontokat összekötő egyenes merőleges az AB szakaszra. (10 pont)

8. Egy szabályos ötszög alakú papírlapot két határpontját összekötő egyenes mentén összehajtunk, és az egymásra boruló részeket összeragasztjuk. Mutassuk meg, hogy az így keletkező papírlap kerülete legfeljebb akkora, mint az eredeti volt. (10 pont)

II. forduló

Az általános tantervű osztályok feladatai

1. Adjuk meg az összes olyan x valós számot, melyre

$$\left|\frac{1}{[x]}\right| = \left[\frac{1}{|x|}\right].$$

(Ha y valós szám, akkor $[y]$ az a legnagyobb egész szám, amely y-nál nem nagyobb.)

2. Szerkesszünk háromszöget, ha ismert egyik oldalának egyenese és a másik két oldalhoz tartozó magasságok talppontjai. Elemezzük a különböző eseteket!

3. Keressük meg az összes olyan természetes számot, amely a tízes számrendszerben négyjegyű, jegyei rendre a, b, c, d $(a \neq 0)$, továbbá

$$a^2+b^2=16c+2d-52, \quad c^2+d^2=2a+16b-73.$$

A szakközépiskolások feladatai

1. Legyen n 2-nél nagyobb természetes szám. Határozzuk meg a

$$K = n^5 - 5n^3 + 4n + 7$$

szám utolsó jegyét.

2. Megegyezik az általános tantervű osztályok 1. feladatával.

3. Megegyezik az általános tantervű osztályok 2. feladatával.

A matematika II. tantervű osztályok feladatai

1. Határozzuk meg az a, b, c valós számokat úgy, hogy az

$$x^3 - ax^2 + bx - c = (x-a)(x-b)(x-c)$$

egyenlőség minden x valós szám esetén teljesüljön.

2. Egy egységnyi oldalú négyzetbe két körlemezt helyezzünk el úgy, hogy ne legyen közös belső pontjuk. Hogyan válasszuk meg és helyezzük el őket, hogy az összterületük maximális legyen, és ebben az esetben mekkora a két kör területének összege?

3. Határozzuk meg az összes olyan $n \geq 1$ természetes számot, melyre $2^n - 1$ valamely természetes szám második vagy annál nagyobb egész kitevős hatványával egyenlő.

Haladók (II. osztályosok)

I. forduló

1. Karcsi megfigyelte, hogy a magyar autók rendszámtábláján látható négy számjegy között gyakran vannak azonosak. Szerinte legalább az autók felének ilyen a rendszáma. Helyes-e az állítása? (6 pont)

2. Milyen a valós számra van megoldása az alábbi egyenletnek?

$$\big|1 - |x|\big| = a - x?$$

6 pont

3. Hány olyan természetes szám van, melyet a kilences és a tizenegyes számrendszerben felírva, egyaránt háromjegyű számokat kapunk? (6 pont)

4. Mutassuk meg, hogy $13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8$ minden n pozitív egész számra osztható 24-gyel! (6 pont)

5. Egy O középpontú kör kerületén mozog egy P pont, melynek vetülete a rögzített AB átmérőn P'. Az OP sugárra mérjük fel O-tól az $OQ = PP'$ szakaszt. Milyen alakzatot alkotnak a Q pontok, ha P végigfut a körön? (8 pont)

6. Az ABC háromszög A-ból és B-ből húzott belső szögfelezőire C-ből merőlegest állítottunk. Ezek talppontja C_1, illetve C_2. Legyen a háromszög beírt körének érintési pontja az AC oldalon D.

Bizonyítandó, hogy $C_1C_2 = CD$. (8 pont)

7. Adjuk meg az összes olyan természetes számot, amelynek pontosan 42 db pozitív osztója van és osztható 42-vel! (10 pont)

8. Bizonyítandó, hogy ha egy konvex 11-szögnek legalább két szimmetriatengelye van, akkor szabályos! (10 pont)

II. forduló

Az általános tantervű osztályok feladatai

1. Oldjuk meg a valós számok körében a

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+3xp+p^2} - \sqrt{y^2+3yp+p^2} &= x - y\\ xy &= p^2\end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol p adott valós szám!

2. Jelölje A_1, A_2, …, A_{36} egy szabályos 36-szög egymás utáni csúcsait. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_{18}, A_4A_{12} és $A_{26}A_{33}$ átlók egy ponton mennek át!

3. Az 1, 2, …, 1983 számokat valamilyen sorrendben felírtuk egymás után. Ezután valaki balról jobbra végignézi az egymás utáni számpárokat (tehát először az első és második számból álló párt, majd a második és harmadikból állót stb.), és ha a bal oldali a nagyobb, felcseréli a számokat. Miután végzett, jobbról balra haladva hajtja végre ugyanezt az eljárást. (Tehát most először az 1982. és 1983. helyen álló számokat hasonlítja össze, és cseréli fel, ha a bal oldali a nagyobb.) A századik helyen álló szám valamennyi cserénél a helyén maradt. Mi lehetett ez a szám?

A szakközépiskolások feladatai

1. Megegyezik az általános tantervű osztályok 1. feladatával.

2. Adott az O_1 középpontú k_1 kör és a középpontján átmenő e egyenes. Tekintsük mindazon k_2 köröket, melyek az O_1 ponton átmennek, középpontjuk az e egyenesen van és k_1-et két pontban metszik. Rajzoljuk meg e körök k_1-gyel való közös érintőit!

Milyen alakzatot határoznak meg az érintők k_2-n fekvő érintési pontjai, ha k_2 minden lehetséges helyzetet felvesz?

3. Adott egy szabályos 45-szög. Lehetséges-e minden csúcshoz hozzárendelni a 0, 1, 2, …, 9 számjegyek valamelyikét úgy, hogy bármely különböző jegyekből álló számpár előforduljon a 45-szög egy megfelelő oldalának két végpontjaként?

A matematika II. tantervű osztályok feladatai

1. Legalább hány számot kell elhagyni az 1, 2, …, 1983 halmazból, ha azt szeretnénk, hogy a maradékban egyik szám se legyen másik kettő szorzata?

2. Megegyezik az általános tantervű osztályok 2. feladatával.

3. Bizonyítsuk be, hogy $n = 1983$ esetén igaz az alábbi állítás: Az 1, 2, …, $n+1$ számok közül ki lehet választani egy különböző számokból álló a_1, a_2, …, a_n sorozatot úgy, hogy az

$$|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \ldots, |a_{n-1} - a_n|, |a_n - a_1|$$

számok mind különbözőek. Mi a helyzet $n = 1982$-re?