(1) $$\frac{n^2+2n-2}{6} < \sum_{k=2}^{n} \sqrt[k]{k!} < \frac{n^2+3n-4}{4}.$$

Ha (1)-et teljes indukcióval akarjuk bizonyítani, azt kell ellenőriznünk, teljesül-e az n legkisebb szóba jövő értékére, és azt, hogy az egyes oldalak megváltozása nem változtat-e az egyenlőtlenség irányán, ha $(n-1)$-ről áttérünk n-re.

Ha $n=2$, akkor (1) az
$$1 < \sqrt{2} < 1{,}5$$
egyenlőtlenséget jelenti; ami valóban igaz. Ha $(n-1)$-ről áttérünk n-re, a bal oldal megváltozása
$$B_n - B_{n-1} = \frac{n^2+2n-2}{6} - \frac{(n-1)^2+2(n-1)-2}{6} = \frac{2n+1}{6},$$
az egyenlőtlenséglánc középső tagjának a megváltozása
$$K_n - K_{n-1} = \sqrt[n]{n!},$$
végül a jobb oldal megváltozása
$$J_n - J_{n-1} = \frac{n^2+3n-4}{4} - \frac{(n-1)^2+3(n-1)-4}{4} = \frac{n+1}{2}.$$
Elég tehát a
$$\frac{2n+1}{6} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2},$$
vagy a kicsit többet mondó

(2) $$\frac{1}{3} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} < \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenséget bizonyítani az $n \geq 3$ egészekre.

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az 1, 2, …, n számokra. Ezeknek a számoknak a mértani közepe
$$M = \sqrt[n]{n!},$$
számtani közepe pedig
$$S = \frac{1+2+\ldots+n}{n} = \frac{n+1}{2}.$$
Az $M < S$ egyenlőtlenségből épp (2) jobb oldalát kapjuk.

Az $n! = n\cdot(n-1)!$ összefüggés alapján alakítsuk a (2) közepén álló kifejezés n-ik hatványát szorzattá:
$$\frac{n!}{(n+1)^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{n!}{n^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{(n-1)!}{n^{n-1}} = \ldots =$$
$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1.$$
Ez egy n-tényezős szorzat, elég belátnunk, hogy mindegyik tagja nagyobb 1/3-nál:

(3) $$\left(\frac{j}{j+1}\right)^j > \frac{1}{3} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Ismét a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget akarjuk felhasználni: veszünk j számot, melyek mindegyike $\left(1+\frac{1}{j}\right)$-vel egyenlő, és veszünk k egymással egyenlő pozitív számot, amelyek szorzata $\frac{1}{3}$-dal egyenlő. Ezek m mértani közepének $(j+k)$-adik hatványa
$$m^{j+k} = \frac{1}{3}\left(\frac{j+1}{j}\right)^j,$$
számtani közepe pedig
$$s = \frac{j\left(1+\frac{1}{j}\right) + k\cdot a}{j+k},$$

ahol $a^k = \dfrac{1}{3}$. Eszerint készen vagyunk, ha sikerül k-t úgy megválasztani, hogy $s = 1$ legyen, hiszen ekkor $m < 1$, ami ekvivalens a bizonyítandó (3)-mal.

Az $s \leq 1$ egyenlőtlenség feltétele

$$j + 1 + k \cdot a \leq j + k, \quad \text{azaz}$$
$$\frac{1}{3} = a^k \leq \left(\frac{k-1}{k}\right)^k,$$

ami teljesül például $k = 6$ mellett:

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{216}{125} = 1{,}728 < \sqrt{3},$$

tehát $\left(\dfrac{5}{6}\right)^6 > \dfrac{1}{3}$.

Megjegyzések. 1. Hasonlóan látható be, hogy (1) igaz marad, ha a bal oldalára $(n^2 + 3n - 2)/6$-t írunk.

2. A (2) közepén álló számok sorozata monoton fogy, de a tagjai nagyobbak a megoldásban szereplő $\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)^k$ alakú számok mindegyikénél, ez utóbbiak sorozata viszont monoton nő. Tehát az

$$A_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k, \qquad B_k = \frac{\sqrt[k]{k!}}{k+1}$$

számokra $A_k < A_{k+1} < B_{k+1} < B_k$ teljesül. Ebből következik, hogy ha $n > k$, akkor a (2)-nél élesebb

$$A_j < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} < B_k$$

egyenlőtlenség is igaz, ahol j tetszőleges egész szám. Azt is he lehet bizonyítani, hogy egyetlen olyan x szám van, amelyre $A_j < x < B_k$ teljesül minden j és k mellett, és ez az x a felsőbb matematika nevezetes, e-vel jelölt konstansának a reciproka: $x = 1/e = 0{,}36787\ldots$