Konvex háromszögtestek

A szabályos testek – tetraéder, kocka, oktaéder, dodekaéder és ikozaéder bizonyára sok olvasónak kedves ismerősei. Azokat a konvex poliédereket nevezzük szabályos testnek, amelyeket egymással egybevágó szabályos sokszögek borítanak, és amelyek testszögletei is egybevágók.

Sokféle bizonyítása ismert annak, hogy szabályos testből öt van. Ezek közül a legegyszerűbb talán a következő. A szabályos testet egyértelműen meghatározza egy testszöglete. Egyenlő oldalú háromszögből egy testszögletben 3, 4 vagy 5 találkozhat. Ennél kevesebb nem alkot testszögletet, többől viszont nem építhető konvex testszöglet. Ennek a három esetnek megfelelően kapjuk a tetraédert, oktaédert és ikozaédert. Négyzet oldalú szabályos test csak egy lehet, mégpedig az, amelynek egy csúcsába 3 lap fut: a kocka. Ötszöglapú szabályos test egy testszögletébe is csak 3 lap futhat a fenti okok miatt. A test a dodekaéder, 6 vagy ennél nagyobb oldalszámú sokszög pedig nem boríthat szabályos testet.

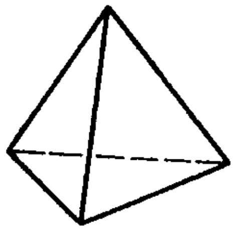
A bizonyítás (inkább intuitív, mint precíz módon) csak azt mutatja, hogy nem létezhet ötnél több szabályos test. Az, hogy az ezzel a gondolatmenettel kiagyalt testek valóban léteznek is, nem is olyan magától értetődő.

Nevezzük *konvex háromszögtest*nek azokat a konvex testeket, melyeket egybevágó szabályos háromszögek borítanak. Ilyen például a tetraéder, oktaéder és ikozaéder a szabályos testek közül. Határozzuk meg az összes ilyen testet!

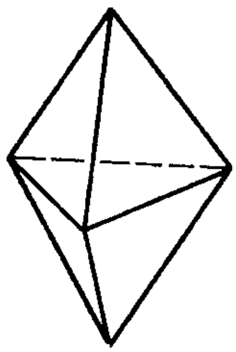
Könnyű belátni, hogy a lapok száma csak páros lehet. N lap esetén ugyanis a testélek száma $3N/2$ – minden háromszögnek 3 oldala van, és minden testélben két háromszögoldal találkozik –, ez pedig csak úgy lehet egész szám, ha N páros. Másrészt láttuk már, hogy egy testszögletbe legalább 3 és legföljebb 5 háromszöglap futhat be. Ebből adódik, hogy egy konvex háromszögtestnek legalább 4 és legfeljebb 20 lapja lehet. Így a tetraéder tekinthető „minimálisnak”, az ikozaéder pedig „maximálisnak” közöttük. Próbáljuk megkonstruálni a köztük levő konvex háromszögtesteket: A tetraéder 4, az ikozaéder 20 lapú, ennyi lappal más konvex háromszögtest nincs. A 6, 8, 10, 12, 14, 16 és 18 lapú testek maradtak. Az utóbbi kivételével mindből van egy–egy, 18 lapú testet azonban, akármennyire is igyekszünk, nem tudunk készíteni!

Lap (L)	4	6	8	10	12	14	16	20
Él (E)	6	9	12	15	18	21	24	30
Csúcs (C)	4	5	6	7	8	9	10	12
3–fokú csúcs	4	2	0	0	0	0	0	0
4–fokú csúcs	0	3	6	5	4	3	2	0
5–fokú csúcs	0	0	0	2	4	6	8	12

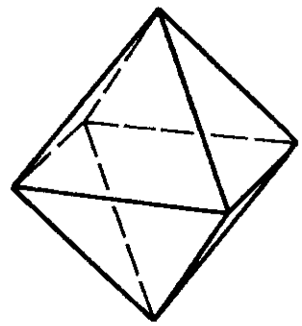
A táblázatban megadtuk a konvex háromszögtestek néhány jellemző adatát. Jól látható, hogy a lapok, élek és csúcsok száma csakúgy, mint a harmad-, negyed- és ötödfokú csúcsok száma, számtani sorozatot alkotnak. Ezekbe a számtani sorozatokba éppen beilleszthetők lennének egy 18 lapú konvex háromszögtest adatai. Éleinek száma 27, csúcsainak száma pedig 11 kellene hogy legyen, melyek közül 1 negyedfokú és 10 ötödfokú lenne.



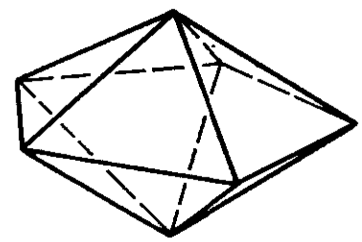
$L = 4$



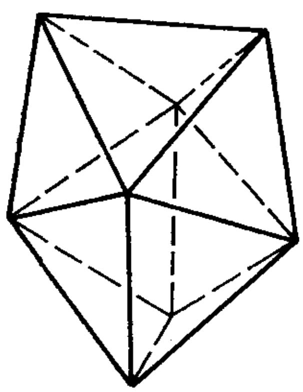
$L = 6$



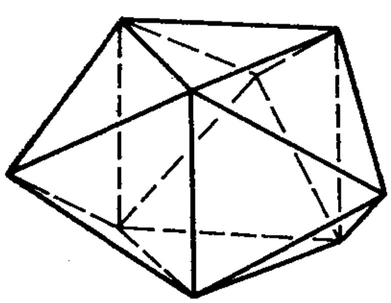
$L = 8$



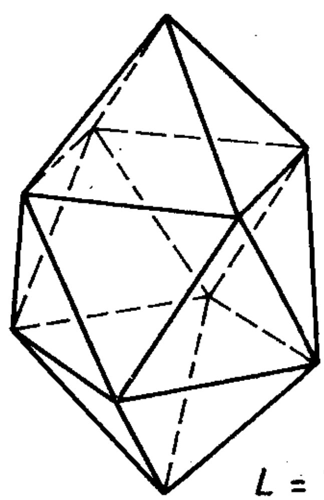
$L = 10$



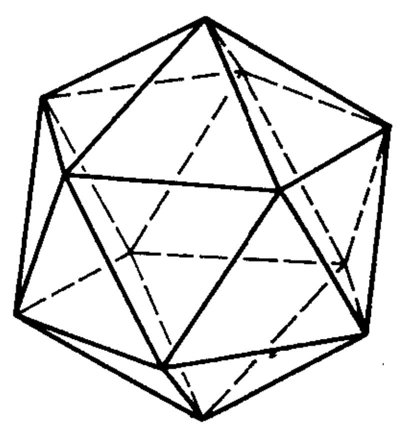
$L = 12$



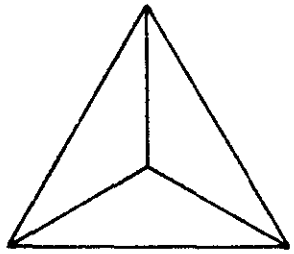
$L = 14$



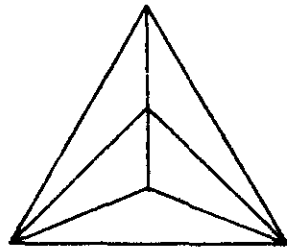
$L = 16$



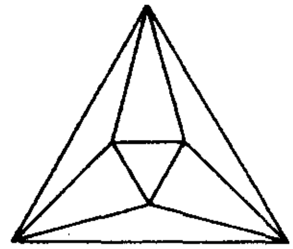
$L = 20$



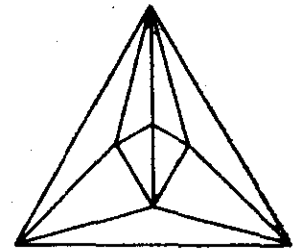
$L=4$



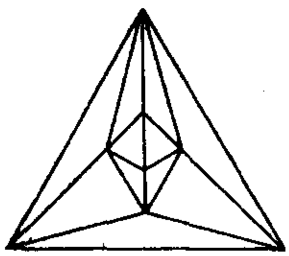
$L=6$



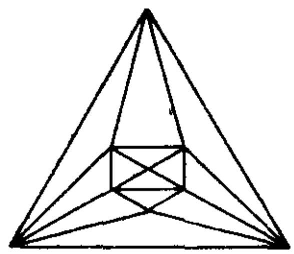
$L=8$



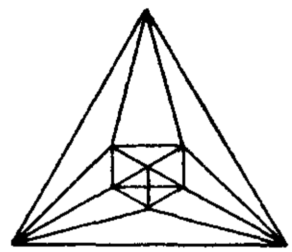
$L=10$



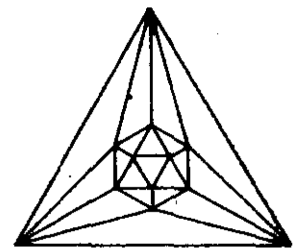
$L=12$



$L=14$



$L=16$



$L=20$

Az ábrákon a 8 konvex háromszögtestet láthatjuk. A gráfok a testek ún. *Schlegel*–diagramjai. (Egy poliéder Schlegel–diagramja a test „élhálózata", vagyis a csúcsok és élek alkotta gráf, síkba rajzolva.)

Próbáljunk bizonyítást adni arra, hogy a felsoroltakon kívül más konvex háromszögtest nem létezik!

Bérczi Tamás, Békéscsaba