I. megoldás. *a)* A K_1 kifejezés ismeretlen tagja maga is mindenesetre négyzetszám: $4^x=(2^x)^2$, tehát feladatunk a $4^{10}+4^{16}$ számot két négyzetszám különbségeként előállítani. Olyan megoldást keresünk, melyben $x\geqq 10$. Ebben a követelmény szerint

$$K_1=4^{10}(1+4^6+4^{x-10})=N^2,$$
$$1+4^6+4^{x-10}=4097+(2^{x-10})^2=\left(\frac{N}{4^5}\right)^2,$$
$$4097=n^2-z^2=(n-z)(n+z),$$

ahol n és z természetes számok, és z-ként csak a 2-nek egy nemnegatív egész kitevőjű hatványa fogadható el. Törzstényezők szorzatára felbontva $4097=1\cdot 4097=17\cdot 241$, így a szóba jövő n, z értékpárok

$$\left.\begin{aligned} n-z&=1\\ n+z&=4097\end{aligned}\right\}\text{-ből } z=2048=2^{11},\ n=2049,$$
$$\left.\begin{aligned} n-z&=17\\ n+z&=241\end{aligned}\right\}\text{-ből } z=112,\ \text{ez nem felel meg.}$$

Eszerint $x-10=11$, $x=21$ megfelelő kitevő, éspedig

$$4^{10}+4^{16}+4^{21}=4^5\cdot 2049^2.$$

Mivel a feladat nem kívánja minden megfelelő x megkeresését, K_1 kérdését megoldottnak tekinthetjük.

A kapott eredményből a feladat második kérdésére is kiolvashatunk egy megoldást, $y=10$ mellett K_2 teljes négyzet.

b) Ugyanezzel az eljárással az $y\geqq 16$ megszorítás alapján a

$$K_2=4^{16}(1+4^5+4^{y-16})=(4^8)^2\left\{1025+(2^{y-16})^2\right\}=M^2,$$
$$1025+u^2=m^2$$

követelményből, ahol $u=2^{y-16}$ és $m=M/4^8$, két megfelelő u, y, m, M számnégyes adódik:

	$m-u$	$m+u$	u	m	y	M
I.	1	1025	$512=2^9$	513	25	$4^8\cdot 513$
II.	25	41	$8=2^3$	33	19	$4^3\cdot 33.$

Ezekkel három megfelelő y értéket találtunk: $y=10$, 19 és 25.

II. megoldás. *a)* Megpróbáljuk K_1 tagjait egyenként azonosítani a $(c+d)^2=c^2+d^2+2cd$ kifejtés tagjaival, felhasználva, hogy az itt föllépő 2-es tényező osztója a K_1-ban előírt alapoknak. A $2cd$ tagnak egymás után 4^{10}, 4^{16}, 4^x szerepét szánjuk.

α) $4^{16}=c^2$ és $4^x=d^2$, azaz $c=2^{16}$ $d=2^x$ mellett $2cd=2^{1+16+x}=4^{10}==2^{20}$, ez $x=3$ mellett teljesül, új megoldást találtunk:

$$4^{10}+4^{16}+4^3=(c+d)^2=(2^{10}+2^3)^2.$$

β) A $c=2^{10}$, $d=2^x$ próbálkozásból az I. megoldásban talált $x=21$ adódik.

γ) A $c=2^{10}$, $d=2^{16}$ próba nem ad megoldást, mert így $2cd$ a 2-nek páratlan kitevős hatványa, a 4-nek nem egész kitevőjű hatványa.

b) Ugyanez az eljárás K_2 esetében mindhárom szereposztásban eredményt ad, az I. megoldásban megtaláltakat. Azon múlik az *a)* esettől való eltérés, hogy ott mindkét ismert kitevő páros, szemben a *b)* esettel.

Megjegyzés. 1. Meg lehet mutatni, hogy a találtakon kívül nincs más megoldás, például a $4=3+1$ helyettesítéssel és a binomiális tétel fölhasználásával adódik, hogy

$$3|x,\quad \text{illetve}\quad 3|(y-1).$$

Pálfalvi György (Győr, Révai M. Gimn., IV. o. t.)

2. Más megmutatása ennek, ha az I. megoldás eljárásában a $4^{10}+4^{16}$, ill. a $4^{16}+4^{21}$ összeget bontjuk *minden* lehető módon két tényező szorzatára. Az $x<10$ és $y<16$ esetek hosszú sikertelenségi sorozatát csak $1-1$ sikeres eset szakítja meg: $x=3$, ill. $y=10$, emiatt mellőztük őket.

III. megoldás. *a)* Ha valamely x mellett K_1 négyzetszám, mondjuk $K_1=N^2$, akkor erre az x-re

$$4^{10}+4^{16}=N^2-4^x=(N-2^x)(N+2^x)=M(M+2^{x+1}),$$

ahol $M=N-2^x$. Eszerint $(4^{10}+4^{16})$ előállítható egy M egész és egy M-nél 2 valamely alkalmas hatványával nagyobb szám szorzataként. Biztosan ilyen előállítást kapunk, ha M-nek 4^{10}, vagy 4^{16} négyzetgyökét választjuk:

$$\begin{aligned}
M&=4^5 \quad \text{mellett} \quad 4^{10}+4^{16}=4^5(4^5+4^{11}), \quad \text{és} \quad x=21\\
M&=4^8 \quad \text{mellett} \quad 4^{10}+4^{16}=4^8(4^8+4^2), \quad \text{és} \quad x=3
\end{aligned}$$

b) Ugyanígy kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
M&=4^8 \quad \text{mellett} \quad 4^{16}+4^{21}=4^8(4^8+4^{13}), \quad \text{és} \quad y=25\\
M&=2^{21} \quad \text{mellett} \quad 4^{16}+4^{21}=2^{21}(2^{21}+2^{11}), \quad \text{és} \quad y=10
\end{aligned}$$