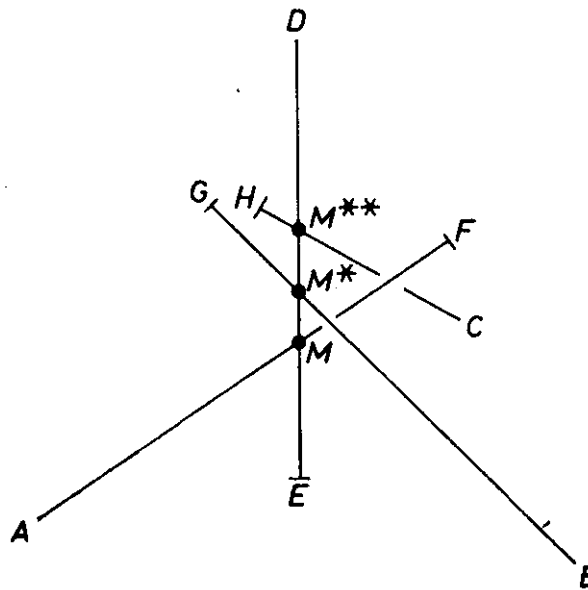


A megoldásban a közös csúcs nélküli élpárok merőleges állásának megmutatásakor látszólag nem használtuk ki teljesen a föltevést; csak azt, hogy a  $DE$  magasság a többi magasságok mindegyikét metszi. Ez a 3 metszéspont – úgy tűnik – különböző is lehetne (1. ábra), mintha a magasságok mintegy függetlenek volnának egymástól.



1. ábra

Elég lett volna azonban a feladatban inkább ezt fölteni: a tetraéder 3 magassága egy  $M$  pontban metszi egymást; már ekkor érvényes a vektoregyenlőség.

Ez a megfogalmazás azonban kevésbé tetszetős, mert nem szimmetrikus, ebben a negyedik magasságot mellőztük. Hasonló a helyzet a síkban is. Így igaz: két magasságvonal metszéspontján szükségképpen átmegy a harmadik, de tetszetősebb együtt szólni a háromról.

A 4 magasság kapcsolatához első meglátásunk: ha – mint a megoldás 1. pontjában –  $DE$  és  $AF$ -nek van közös pontja,  $M$ , akkor  $BG$  és  $CH$  is metszi egymást egy  $M^*$  pontban. Ez azonban nem szükségképpen azonos  $M$ -mel! Bizonyításul belátjuk, hogy  $M$  létezéséhez nemcsak szükséges, hanem elegendő feltétel is, hogy  $DA \perp BC$  legyen.

Ha ugyanis azt tudjuk, hogy  $DA \perp BC$ , akkor – mivel  $DE$  a szerkesztésnél fogva merőleges az  $ABC$  síkbeli  $BC$ -re –, azért a  $DAE$  sík is merőleges  $BC$ -re. Ugyanígy merőleges  $BC$ -re az  $ADF$  sík is. Ámde az  $A$  ponton át  $BC$ -re csak egy merőleges sík állítható, ezért  $D, A, E$  és  $F$  egy síkban vannak. Nem lehet azonban, hogy a  $DE$  és  $AF$  egyenesek párhuzamosak legyenek – hiszen úgy az  $ABC$  és  $DBC$  lapsíkok is párhuzamosak lennének –, ennél fogva  $DE$  és  $AF$  metszik egymást.

Ebből már következik, hogy feltevésünk mellett a tetraéder  $B, C$  csúcsaiból húzott magasságok is metszik egymást egy  $M^*$  pontban, hiszen a  $DA \perp BC$  tényben a két egyenes egyenrangú.

$M^*$  és  $M$  különböző lehet, erre példát mutat a 2. ábra. Tetraéderünk csúcsai egy szabályos négyoldalú hasáb csúcsai közül valók, ennél fogva lapjai egyenlő szárú háromszögek.

