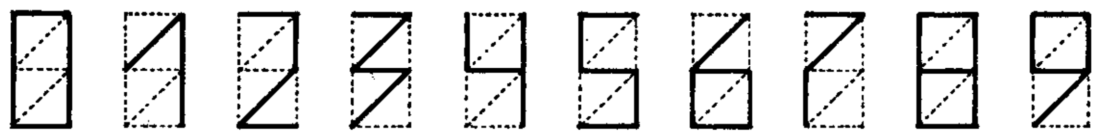
A középiskolások 1982. évi Számítástechnikai Versenyén kitűzött néhány feladat megoldása

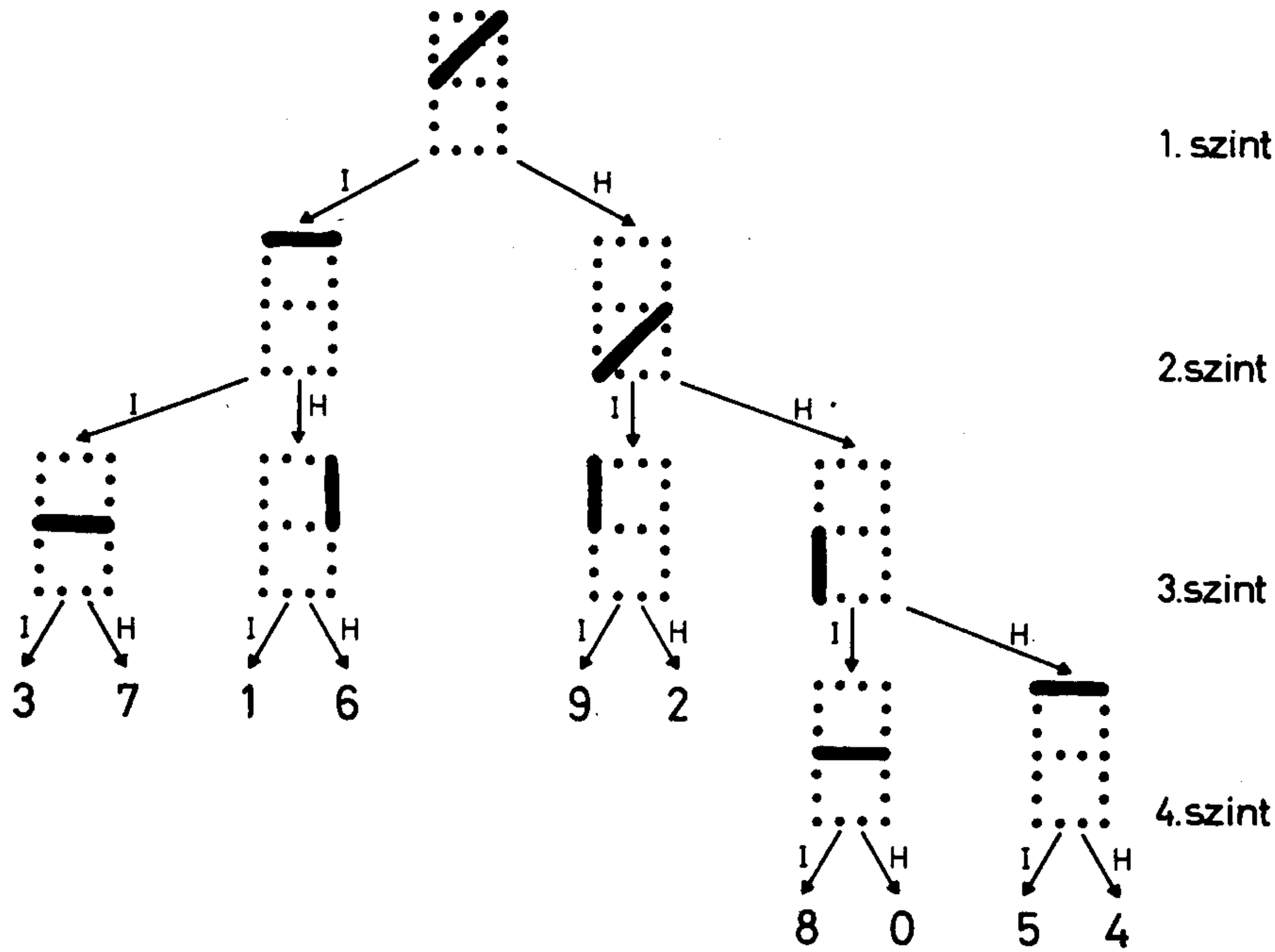
Az első forduló 2. feladata

A szovjet borítékokon az alábbi ábrán látható módon kell megadni az irányítószámok számjegyeit.



Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a tíz számjegy mindegyikét az itt látható 9 vonalkából kell összeállítani. A leveleket osztályozó gép a programozó által előírt sorrendben lépésenként egy–egy vonalkáról eldönti, hogy megvastagította-e a levél feladója. Adjunk meg egy eljárást, amelynek során a gép minél kevesebb vonalka megvizsgálásával dönti el, hogy milyen számjegy van a téglalapban. (Mindegyik kérdés függhet a korábbi kérdésekre kapott választói.) Képzeljük el, hogy a gépnek tízezer borítékot kell az utolsó számjegyük alapján szétválogatnia: mindegyik számjegy egyforma gyakorisággal (ezerszer) fordul elő. Hány vonalkát fog a gép végigvizsgálni a feladat megoldása során?

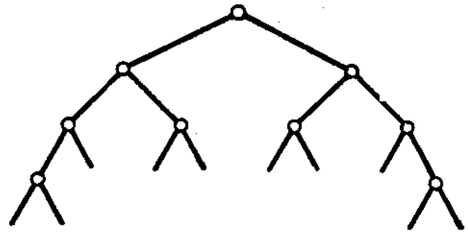
Megoldás. Az osztályozó eljárást legszemléletesebben az ún. *döntési fa* felrajzolásával adhatjuk meg.

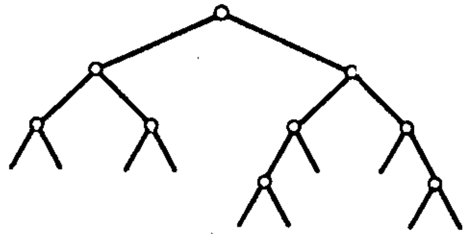


Az ábra „olvasása” nyilvánvaló: minden csomópontban a gép eldönti, hogy a megadott vonalka vastag-e vagy nem. Ha vastag, az I (= igaz) betűvel jelzett ágon halad tovább, ha nem, akkor a H (= hamis) ágon. Könnyen látható az is, hogy egy adott szám meghatározásához annyi vizsgálat szükséges, ahány szint van fölötte a döntési fában.

Minthogy egy vizsgálatnak pontosan kétféle eredménye lehet és $2^3 < 10 < 2^4$, nincs olyan döntési fa, amelyben minden számjegy legfeljebb 3 vizsgálattal meghatározható. Az is igazolható, hogy a 3 vagy 4 vizsgálattal eredményre vezető döntési fákban mindig van 6 szám, amelynek meghatározása 3 vizsgálatot, míg a további 4 szám meghatározása 4 vizsgálatot igényel.

Ilyen döntési fák még:





Ha mind a 10 számjegy azonos gyakorisággal fordul elő, akkor éppen ezek a döntési fák optimálisak. Példánkban $(6 \cdot 3 + 4 \cdot 4) \cdot 1000 = 34\ 000$ vizsgálatot kell végezni.

Megjegyzések. 1.A számjegyek kódolása a szovjet borítékokon szerencsés, mert mint megmutattuk – egyenletes előfordulási gyakoriság esetén – szerkeszthető optimális döntési fa.

2. Ha a számjegyek különböző gyakorisággal fordulnak elő, nem feltétlenül a fenti ún. *kiegyensúlyozott* döntési fák az optimálisak.

Az első forduló 3. feladata

Adott egy 4 alapműveletet végző, 9 számjegyet megjelenítő zsebszámológép. Ennek segítségével kell kiszámolnunk, hogy 2^{1000} mennyi maradékot ad 1982-vel osztva. A memória funkcióját egy papírlap és toll segítségével magunk látjuk el (a papíron műveleteket nem végezhetünk). Adjunk módszert a maradék minél kevesebb művelettel való kiszámolására. Állapítsuk meg, hogy eljárásunk során hány alapműveletet kell a gépnek elvégeznie.

I. megoldás. A feladat megoldásához a következő elemi tényt használjuk fel. Ha a, b, c, d és m természetes számok, a és b, ill. c és d ugyanazt a számot adják maradékul m-mel osztva, akkor $a \cdot c$ és $b \cdot d$ is ugyanazt a maradékot adja. Bontsuk fel 2^{1000}-t a következő módon:

$$(*) \qquad 2^{1000} = 2^{40} \cdot 2^{960} = (2^{20})^2 \cdot (2^{15})^{64}.$$

Először azt határozzuk meg, hogy 2^{40} mennyit ad maradékul 1982-vel osztva: $2^{40} = 2^{20})^2$ és $2^{20} = 1\ 048\ 576$, ami még belefér a gépbe. Ezért 3 művelettel (egy maradékos osztással) megállapítható, hogy 2^{20} mennyit ad maradékul 1982-vel osztva: 98-at. A másik tényező, $(2^{15})^{64}$ felírható

$$((((((2^{15})^2)^2)^2)^3)^3$$

alakban. 3 művelettel megállapítjuk a 2^{15} maradékát, ezt négyzetre emeljük, 3 művelettel megállapítjuk a maradékot, majd ezt az utóbbi 4 lépést 5-ször megismételjük.

Bár a feladat kitűzésében ez nem szerepel, illusztrációként elvégezzük a számításokat:

$2^{15} = 32\ 768$	maradék : 1056
$1056^2 = 1\ 115\ 136$	maradék : 1252
$1252^2 = 1\ 567\ 504$	maradék : 1724
$1724^2 = 2\ 972\ 176$	maradék : 1158
$1158^2 = 1\ 340\ 964$	maradék : 1132
$1132^2 = 1\ 281\ 424$	maradék : 1052
$1052^2 = 1\ 106\ 704$	maradék : 748.

Végül (emlékezzünk a (*) képletre!) a $98^2 \cdot 748 = 7\ 183\ 792$-ről további 3 művelettel megállapítható, hogy 1982-vel osztva 1024-et ad maradékul.

Ha feltételezzük, hogy 2 első 10 hatványát fejből tudjuk, akkor a 2^{20} és a 2^{15} kiszámítása egy–egy műveletet igényel. Ezenkívül végeztünk 7 négyzetreemelést, 1 szorzást és 8 maradékos osztást (24 művelet), tehát összesen 34 műveletet. (Az utolsó lépésben egy kis szerencsénk volt: $98^2 \cdot 748$ még befért a gépbe.)

II. megoldás. Az előző megoldás során az 1982 semmilyen speciális tulajdonságát nem használtuk ki. Vegyük azonban észre, hogy $1982 = 2 \cdot 991$, és 991 prímszám. Ezért a Fermat–tétel miatt $(2^{990} - 1)$ osztható 991-gyel, azaz $(2^{991} - 2)$ osztható 1982-vel. Minthogy

$$2^{1000} = (2^{991} - 2) \cdot 2^9 + 2 \cdot 2^9,$$

ez utóbbi összeg első tagja osztható 1982-vel, tehát a keresett maradék 1024.

Ez a megoldás végül nem igényelt egyetlen „gépi” műveletet sem, mert fel tudtuk használni azt a körülményt, hogy az 1982 fele egy 1000-hez közeli, 1000-nél kisebb prímszám.

Megjegyzés. Azok a versenyzők, akik ezt a megoldást adták – igen helyesen – észrevették, hogy ez „nem számítástechnikai” megoldás, mert nem lehet egyszerűen és áttekinthetően általános algoritmussá fejleszteni.

A második forduló 3. feladata

Van N hírszerző. A felderítés befejezése után igyekeznek minél gyorsabban egymást értesíteni a szerzett információról. Egyszerre csak két hírszerző találkozhat, egy találkozáskor mindent elmondanak egymásnak,amit tudnak.

a) Adjunk meg olyan algoritmust, hogy $2N - 3$ találkozás után minden hírszerző ismerje a teljes felderített információt.

b) Ha $N \geq 4$, adjunk meg olyan algoritmust, amely ugyanezt a célt $2N - 4$ lépésben valósítja meg.

Megoldás. Az $N = 2, 3$ esetre a feladat megoldása nyilvánvaló. Az is világos, hogy $N \geq 4$ esetén elegendő a b) feladatot megoldani. Jelölje $h_1, h_2, \ldots, h_N$ az N hírszerzőt. $N = 4$-re pl. a (h_1, h_2), (h_3, h_4), (h_1, h_3), (h_2, h_4) találkozósorozat után megtörténik a teljes információcsere.

Ha $N > 4$, jelöljünk ki egy 4-elemű „agytrösztöt”, pl. h_1, h_2, h_3, h_4. Az agytröszt tagjai találkoznak a maradék $N - 4$ hírszerzővel.

Ezek után egymás között 4 találkozás során kicserélik az általuk ismert (teljes) információt, majd az agytröszt tagjai $N - 4$ találkozás során közlik a teljes információt a többi hírszerzővel.

Látható, hogy lényegtelen az agytröszt tagjai közötti „ munkamegosztás” az információ begyűjtésében és terjesztésében.

A második forduló 4. feladata

Van egy N tagú társaság. A társaság minden tagja legfeljebb 19 másik tagot ismer. Feladatunk az, hogy a társaságot 2 részre bontsuk, a „7-esek” és a „11-esek” klubjára úgy, hogy a „7-esek” klubjukon belül legfeljebb 7, a „11-esek” klubjukon belül legfeljebb 11 másik tagot ismerjenek. Egy matematikus a következő eljárást ajánlja: először osszuk tetszőlegesen két részre a társaságot, majd „fokozatosan” lépésenként javítsuk ki az esetleges hibákat: ha valaki egy adott lépésben a „7-esek” klubjához tartozik és ebben a klubban legalább 8 ismerőse van, tegyük át a „11-esek” klubjába, ill. fordítva, ha valakinek a „11-esek” klubjában legalább 12 ismerőse van, tegyük át a „7-esek” közé. Így minden csere után megváltozik a klubok összetétele. Igaz-e, hogy ez az eljárás véges számú lépésben biztosan célra vezet?

Megoldás. A matematikusnak igaza van. Meg tudunk ugyanis adni olyan, a klubokba sorolástól függő természetes szám értékű függvényeket, amelyek értéke minden egyes javító lépés során legalább 1-gyel csökken. Ezért az algoritmus véges sok lépés után megszakad, ami azt jelenti, hogy a kívánt tulajdonságú klubok létrejöttek.

A feladatot két csapat oldotta meg helyesen, a két csapat két különböző (C_1 és C_2) függvényt adott meg:

$C_1 = 7\times$ (a 11-esek klubján belüli ismeretségek száma) $+11\times$ (a 7-esek klubján belüli ismeretségek száma ill.

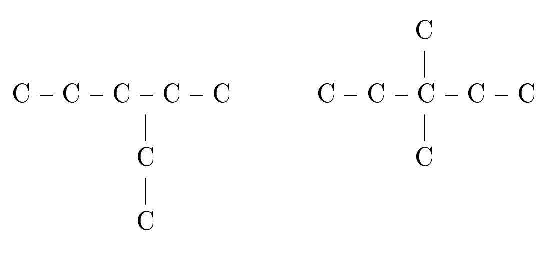
$C_2=$(a klubokon belüli ismeretségek össz-száma) $+4\times$ (a 7-esek klubjának létszáma).

Egyszerű számolás mutatja, hogy a C_1 függvény értéke 11-es $\to$ 7-es csere esetén legalább 7-tel, 7-es-$\longrightarrow$ 11-es csere esetén legalább 11-gyel csökken.

Mindkét függvény felhasználásával azt kapjuk, hogy ha kezdetben mindenki a 11-esek klubjába volt besorolva, akkor az eljárás véget ér, mégpedig legfeljebb annyi lépésben, mint amennyi a társaságban az összes ismeretségek száma.

A második forduló 5. feladata

Írjuk föl a C_7H_{16} tapasztalati képleti szénhidrogén összes izomerjének szerkezeti képletét (a hidrogénatomok feltüntetése nélkül). 2 vegyület izomerje egymásnak, ha azonos a tapasztalati képletük, de különböző a szerkezeti képletük, pl.



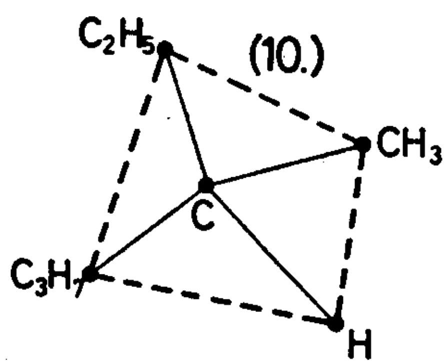
Ügyeljünk arra, hogy minden vegyület pontosan egyszer szerepeljen! Mennyi a kapott izomerek száma?

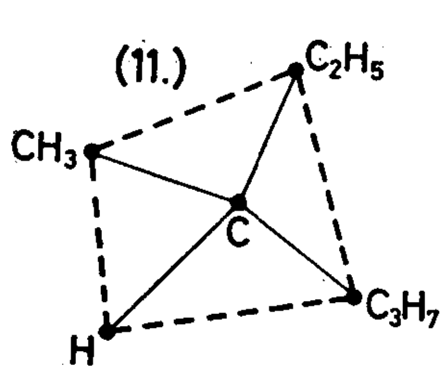
Megoldás. A feladatot helyesen megoldók észrevették, hogy az izomereket a bennük található leghosszabb szénlánc szerint rendezve érdemes felsorolni !

```
7 hosszúságú maximális lánc:  C – C – C – C – C – C – C        (1)
6 hosszúságú maximális lánc:  C – C – C – C – C – C            (2)
                                  |
                                  C
                             C – C – C – C – C – C              (3)
                                       |
                                       C
5 hosszúságú maximális lánc:      C
                                  |
                              C – C – C – C – C                 (4)
                                  |
                                  C

           C
           |                         C – C – C – C – C
   C – C – C – C – C        (5)          |   |                  (6)
           |                             C   C
           C

                                     C – C – C – C – C
   C – C – C – C – C                         |
       |       |            (7)              C                  (8)
       C       C                             |
                                             C

4 hosszúságú maximális lánc:      C
                                  |
                              C – C – C – C                     (9)
                                  |   |
                                  C   C
```

Összesen 9 *izomér.* Egy versenyzőpáros felhívta a figyelmet arra, hogy ha a hidrogénatomokat is feltüntetnénk, akkor a 3. és a 6. vegyületnek 2 olyan változata létezik, amelyek a „vegyértékvonalak” folytonos hajlításával, ill. nyújtásával és térbeli mozgással nem vihetők át egymásba, csak egymás tükörképeibe (sztereoizoméria). Ez a helyzet akkor áll elő, ha van olyan szénatom, amelynek mind a 4 vegyértékéhez más vegyületcsoport kapcsolódik.

Így a sztereoizomérek száma 11.





```
DIMENSION K (10)
DATA K/1,1,2,6,24,120,720,5040,40320,362880/
PRINT 4
FORMAT(' A KÖVETKEZÖ SZÁMOK A JOK:')
IR=0
D O 1 I 1=1.10
D O 1 I 2=1,10
D O 1 I 3=1,10
D O 1 I 4=1,10
D O 1 I 5=1,10
D O 1 I 6=1,10
L = O
K 1= I 1-1
K 2 =I 2-1
K 3 = I 3-1
K 4 = I 4-1
K 5 = I 5-1
K 6 = I 6-1
1=K6+K5*10+K4*100+3*1000+K2*10000+K1*100000
IF (K1.NE.0)GOTO2
L=L+1
IF (K2.NE.0)GOTO2
L=L+1
IF (K3.NE.O)GOTO2
L=L+1
IF (K4.NE.O)GOTO2
L=L+1
IF (K5.NE.0)GOTO2
L=L+1
IF (K6.EQ.O)GOTO1
CONTINUE
M=K(I1)+K(I2)+K(I3)+K(I4)+K(I5)+K(I6)-L
IF(I.RQ.M)PRINT 3,I
IF(I.EQ.M)IR=IR+1
FORMAT(1X,16)
CONTINUE
PRINT 5,IR
FORMAT(' TEHÁT ÖSSZESEN ',16,'DARAB SZÁKOT TALÁLTUNK')
STOP 1
END
```

A második forduló 6. feladata

Számítsuk ki program segítségével, hogy 1*-től* 10^6*-ig hány darab természetes számnak van olyan tulajdonsága, hogy a szám egyenlő számjegyei faktoriálisainak összegével (pl.* $145 = 1! + 4! + 5!$*). A végeredményt az IRDKI nevű egész változóban tároljuk. A program írásához a választott nyelvnek lehetőség szerinti legszűkebb utasítás készletét használjuk!*

A program FORTRAN, PL/1, BASIC, ALGOL és COBOL nyelveken vagy blokk–diagrammal készíthető el.

A megoldás egy programja látható az előző oldalon. A megfelelő tulajdonságú természetes számok: 1, 2, 145, 40 585.