Havonta egy-egy, számomra valamilyen oknál fogva kedves feladatot mondok el. Ezek megoldása, noha a középiskolában oktatott ismeretanyagnál többet nem kíván, mégis mély, igazi matematikusi gondolkodást igényel. A problémákra a megjelenést követő számban megoldást adok, azonban nem kívánok egyetlen problémát sem teljesen lezárni. Akár a feladatokkal, akár azok megoldásával kapcsolatban minden megjegyzést örömmel veszek.

Csirmaz László

***

A (végtelen) négyzethálós papír minden mezőjébe egy-egy természetes számot kell írnunk úgy, hogy minden mezőbe annak a négy számnak a számtani közepe kerüljön, melyek az oldalszomszédos négy mezőben állnak. Ismeretes, hogy ezt csak úgy tudjuk megtenni, ha minden mezőbe ugyanazt a számot írjuk. Valóban, keressük ki azt a mezőt (vagy az egyik olyat), amelybe a szereplő egészek közül a legkisebb került. Ennek szomszédaiba is ugyanezt a minimális számot kellett írnunk, ezek szomszédaiba is, és így tovább. Ez pedig már mutatja, hogy az összes szereplő szám szükségképpen egyenlő.

Ha a beírandó számok nem nemnegatív egészek, hanem tetszőleges 0 és 1 közé eső valós számok lehetnek, akkor már nem feltétlenül van minimális a beírt számok között. Ezért a fenti gondolatmenet nem alkalmazható. Mi a helyzet ebben az esetben?

*

Állítjuk, hogy a beírt számok ekkor is egyenlők. Tételezzük fel, hogy nem így volna, ekkor persze van két szomszédos mező, melyekben különböző számok állnak. Így (esetleg a papírlap elforgatásával) elérhetjük, hogy legyen olyan mező, melyben nagyobb szám áll, mint a jobb oldali szomszédjában.

Most minden mezőre vonjuk ki az ott álló számból a jobb oldali szomszéd mezőben álló számot, és a különbséget írjuk vissza a kisebbítendő helyére. A mezőkben eredetileg 0 és 1 közti számok álltak, így e különbségek mind $+1$ és -1 közé esnek, továbbá az előzőek szerint akad a különbségek között pozitív is. Minthogy eredetileg minden szám szomszédainak számtani közepe volt, ez a tulajdonsága az új táblázatnak is megmarad. Vegyük még észre, hogy az új táblázatban akármilyen sok, egymással szomszédos, egy sorban álló számot veszünk ki, azok összege

$$(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ \dots \ + (a_{n-1} - a_n) = a_1 - a_n$$

alapján megegyezik két, az eredeti táblázatban található szám különbségével, s így biztosan kisebb 1-nél.

Jelöljük $2a$-val az új táblázatban álló számok legkisebb felső korlátját. Ez pozitív, hiszen van pozitív szám a táblázatban, másrészt legfeljebb 1, tehát a $a \leqq 1/2$. Legyen k olyan egész szám, ami nagyobb $1/a$-nál, s legyen ε pozitív, de kisebb $(a/4^k)$-nál. Ekkor van a táblázatban $(2a - \varepsilon)$-nál nagyobb szám, hiszen $2a$ volt a legkisebb felső korlát. Ennek jobb oldali szomszédja nagyobb, mint $2a - 4\varepsilon$, hiszen a másik három szomszéd legfeljebb $2a$, s ellenkező esetben számtani közepük nem lehet $(2a - \varepsilon)$-nál nagyobb.

Ugyanígy kapjuk, hogy ennek jobb oldali szomszédja nagyobb, mint $2a - 4 \cdot 4\varepsilon = 2a - 4^2\varepsilon$; ennek jobb oldali szomszédja nagyobb $(2a-4^3\varepsilon)$ -nál, még a $(k-1)$-edik jobb oldali szomszédja is nagyobb, mint $2a-4^{k-1}\varepsilon > 2a-a/4 > a$.

Így találtunk k szomszédos mezőt, melyek mindegyikében a-nál nagyobb szám áll, és $k > 1/a$ miatt ezek összege nagyobb 1-nél. Előbb viszont megállapítottuk, hogy egy sorban álló, szomszédos számok összege kisebb 1-nél. Ellentmondásra jutottunk, s ezzel az állítást bizonyítottuk.

Az állításból az is kiolvasható, hogy ha a négyzethálós papírt megfelelően kitöltöttük, és a beírt számok alulról és felülről is korlátosak (azaz van olyan M, hogy az összes beírt szám $-M$ és $+M$ közé esik), akkor minden mezőbe ugyanazt a számot kellett írnunk. Ennél több is igaz: ha csak annyit teszünk fel, hogy a beírt számok alulról (vagy csak felülről) korlátosak, már ebből is következik, hogy a számok szükségképpen egyenlők. E tétel egy általánosítását használta *Bárány Imre, Füredi Zoltán* és *Pach János* a következő tétel. igazolására: Ha a síkra úgy helyezünk el körlemezeket, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös belső pontja, továbbá mindet legalább 6 másik érintsen, akkor vagy a körök középpontjai egy szabályos háromszögrácsot alkotnak és a körök sugarai egyenlők, vagy pedig a kör sugarak között akármilyen kicsinek is elő kell fordulnia.