Havonta egy-egy, számomra valamilyen oknál fogva kedves feladatot mondok el. Ezek megoldása, noha a középiskolában oktatott ismeretanyagnál többet nem kíván, mégis mély, igazi matematikusi gondolkodást igényel. A problémákra a megjelenést követő számban megoldást adok, azonban nem kívánok egyetlen problémát sem teljesen lezárni. Akár a feladatokkal, akár azok megoldásával kapcsolatban minden megjegyzést örömmel veszek.

Csirmaz László

*

A (végtelen) négyzethálós papír minden mezőjébe egy-egy természetes számot kell írnunk úgy, hogy minden mezőbe annak a négy számnak a számtani közepe kerüljön, melyek az oldalszomszédos négy mezőben állnak. Ismeretes, hogy ezt csak úgy tudjuk megtenni, ha minden mezőbe ugyanazt a számot írjuk. Valóban, keressük ki azt a mezőt (vagy az egyik olyat) amelybe a szereplő egészek közül a legkisebb került. Ennek szomszédaiba is ugyanezt a minimális számot kellett írnunk, ezek szomszédaiba is, és így tovább. Ez pedig már mutatja, hogy az összes szereplő szám szükségképpen egyenlő.

Ha a beírandó számok nem csak nem-negatív egészek, hanem tetszőleges 0 és 1 közé eső valós számok lehetnek, akkor már nem feltétlenül van minimális a beírt számok között. Ezért a fenti gondolatmenet nem alkalmazható. Mi a helyzet ebben az esetben?

* * *

Van-e olyan (tízes számrendszerben felírt) négyzetszám, mely elé az $1, 9, 8, 3$ *jegyeket ebben a sorrendben írva ismét négyzetszámot kapunk?*

*

Igen, van, például az $a = 3 \cdot 5^{22} - 661 \cdot 2^{20} \cdot 10^7$ szám négyzete ilyen. Mivel

$$a^2 = (3 \cdot 5^{22})^2 - 2 \cdot (3 \cdot 5^{22}) \cdot (661 \cdot 2^{20} \cdot 10^7) + (661 \cdot 2^{20} \cdot 10^7)^2$$

értéke kb. $4{,}905 \cdot 10^{28}$, azért ha a^2 elé az 1, 9, 8, 3 jegyeket írjuk, a szám értékét az

$$1983 \cdot 10^{29} = 3 \cdot 661 \cdot 5^{22} \cdot 4 \cdot 2^{20} \cdot 10^7$$

mennyiséggel növeljük. Ezért

$$\begin{aligned} a^2 + 1983 \cdot 10^{29} &= (3 \cdot 5^{22})^2 + 2 \cdot (3 \cdot 5^{22}) \cdot (661 \cdot 2^{20} \cdot 10^7) + (661 \cdot 2^{20} \cdot 10^7)^2 = \\ &= (3 \cdot 5^{22} + 661 \cdot 2^{20} \cdot 10^7)^2, \end{aligned}$$

ahogyan kívántuk. Megmutatható, hogy végtelen sok ilyen tulajdonságú szám van, s köztük a fenti a legkisebb.