Havonta egy-egy, számomra valamilyen oknál fogva kedves feladatot mondok el. Ezek megoldása, noha a középiskolában oktatott ismeretanyagnál többet nem kíván, mégis mély, igazi matematikusi gondolkodást igényel. A problémákra a megjelenést követő számban megoldást adok, azonban nem kívánok egyetlen problémát sem teljesen lezárni. Akár a feladatokkal, akár azok megoldásával kapcsolatban minden megjegyzést örömmel veszek.

*

Van-e olyan (tízes számrendszerben felírt) négyzetszám, mely elé az 1, 9, 8, 3 jegyeket ebben a sorrendben írva ismét négyzetszámot kapunk?

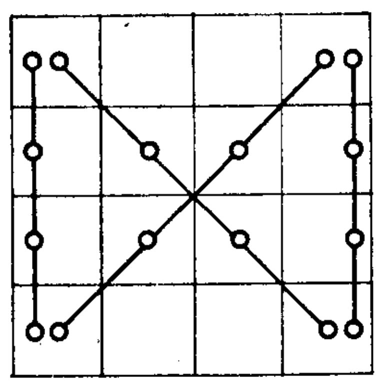
* * *

Mutassuk meg, hogy az első 64 *pozitív egészből nem lehet olyan* $4 \times 4 \times 4$*-es, hagyományos értelemben vett bűvös kockát előállítani, melyben az összes, egy egyenesre eső 4–4 szám összege (beleértve a testátlókat is) ugyanannyi legyen.*

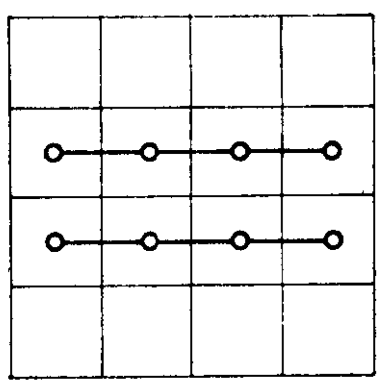
Bűvös négyzetben a sorokban, az oszlopokban, valamint a két átlóban álló számok összege megegyezik, ezt a közös összeget a bűvös négyzet *állandójának* szokás nevezni. A feladat feltételeinek megfelelően tegyük fel, hogy sikerült 64 (egész) számot elhelyezni egy $4 \times 4 \times 4$-es kockában úgy, hogy a kocka 4×4-es síkmetszetei (ugyanolyan állandójú) bűvös négyzetek legyenek. (Könnyű utánaszámolni, hogy összesen 18 ilyen síkmetszet van.) Megmutatjuk, hogy ebben az esetben a kockába beírt számok között van két egyenlő – ez bizonyítja állításunkat.

Elsőként megmutatjuk, hogy egy 4×4-es bűvös négyzetben a négy „sarokelem” összege is a bűvös állandót adja.

Valóban, adjuk össze az 1*a* ábrán megjelölt mezőkben álló számokat, mindegyiket annyiszor, ahány pont a megfelelő mezőben szerepel. Látható, hogy az összeg a bűvös állandó négyszerese.

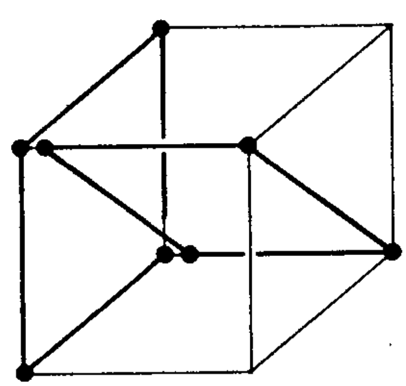


1a. ábra

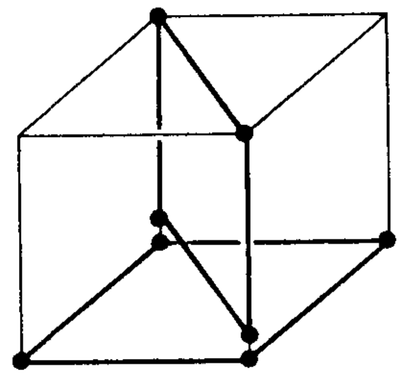


1b. ábra

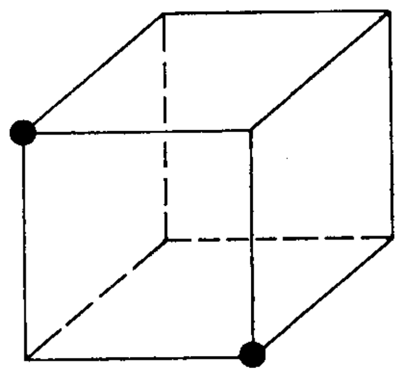
Ebből vonjuk le az 1*b* ábrán megjelölt számok összegét – a bűvös állandó kétszeresét. Ami megmaradt az egyrészt a sarokelemek összegének kétszerese, másrészt a bűvös állandó kétszerese, ami éppen állításunkat adja.



2a. ábra



2b. ábra



2c. ábra

Tekintsük most a kocka csúcsaiba írt nyolc számot! Előző eredményünk értelmében a $2a$ valamint $2b$ ábrán a megjelölt számok összege a bűvös állandó kétszerese, tehát ezen összegek különbsége nulla. Ez pedig nem más, mint a $2c$ ábrán megjelölt két csúcsban álló számok különbségének kétszerese. Így erre a két helyre ugyanazokat a számokat kellett írnunk, amivel bizonyításunkat befejeztük.