Havonta egy-egy, számomra valamilyen oknál fogva kedves feladatot mondok el. Ezek megoldása, noha a középiskolában oktatott ismeretanyagnál többet nem kíván, mégis mély, igazi matematikusi gondolkodást igényel. A problémákra a megjelenést követő számban megoldást adok, azonban nem kívánok egyetlen problémát sem teljesen lezárni. Akár a feladatokkal, akár azok megoldásával kapcsolatban minden megjegyzést örömmel veszek.

Csirmaz László

*

Mutassuk meg, hogy az első 64 pozitív egészből nem lehet olyan $4 \times 4 \times 4$-es, hagyományos értelemben vett bűvös kockát előállítani, melyben az egy egyenesre eső $4-4$ szám összege (beleértve a testátlókat is) ugyanannyi legyen.

* * *

Tetszőleges x valós számra $[x]$ jelöli x egész részét, vagyis a legnagyobb olyan egészt, mely még nem nagyobb x-nél. Minden $t \geqq 2$ természetes számra legyen

$$f(t) = \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{t-1}\left[\frac{1}{1+t-i\cdot[t/i]}\right]}\right], \tag{1}$$

továbbá ha $n \geqq 1$ egész, akkor

$$g(n) = 1 + 2^{2n} - \sum_{i=2}^{2^{2n}}\left[\frac{1}{1+\left[\frac{n-1}{\sum_{f=2}^{i} f(j)}\right]}\right]. \tag{2}$$

Mármost a kérdés az: mit számít ki ez a„képlettel definiált” $g(n)$ függvény?

Ha $t \geqq 2$ és $1 \leqq i < t$ természetes számok, akkor $t-i\cdot[t/i]$értéke éppen t-nek i-vel való osztásakor kapott maradék. Így

$$\frac{1}{1+t-i\cdot[t/i]} \tag{3}$$

értéke 1, ha i osztója t-nek, különben pedig 1-nél kisebb pozitív szám, hiszen ekkor a nevező 1-nél nagyobb. Ezért (3) egész része vagy 1 vagy 0, attól függően, hogy i osztója-e t-nek vagy sem. Tehát a

$$\sum_{t=1}^{t-1}\left[\frac{1}{1+t-i\cdot[t/i]}\right]$$

kifejezés megadja t azon d osztóinak számát, amikre $1 \leqq d \leqq t-1$. Ez a szám csak akkor 1, ha t prímszám (hiszen legalább egy osztója, ti. az 1, minden számnak van), egyébként értéke legalább 2. Ez pedig azt jelenti, hogy $f(t)$ értéke akkor 1, ha t prímszám, és 0, ha t összetett.

Ezek után térjünk át a $g(n)$-et definiáló (2) formulára. Mivel $f(i)=1$, ha i prím, és $f(i)=0$ egyébként, azért $\sum_{j=2}^{i} f(j) > n-1$ pontosan akkor áll fenn, ha i legalább akkora, mint az n-edik prímszám, amit jelöljünk p_n-nel. (Így például $p_1=2, p_2=3, p_3=5$ stb.). Más szavakkal

$$\left[\frac{1}{1+\left[\frac{n-1}{\sum_{j=2} f(j)}\right]}\right] = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad i < p_n \\ 1, & \text{ha} \quad i \geqq p_n. \end{cases}$$

Most fogadjuk el egy pillanatra, hogy az n-edik prímszám kisebb 2^{2n}-nél, akkor

$$\sum_{i=2}^{2^{2n}}\left[\frac{1}{1+\left[\frac{n-1}{\sum_{j=2}^{i} f(j)}\right]}\right] = 2^{2^n} - (p_n - 1),$$

hiszen $i=p_n$-től $i=2^{2n}$-ig csupa egyest kellett összeadnunk. Ennek alapján $g(n)=p_n$,az n-edik prímszám. Levonhatjuk a tanulságot : igenis *van* olyan „képlet”, ami az n-edik prímszámot definiálja, bár ennek alapján az n-edik prím kiszámítása sokkal több munkát igényel, mintha azt a „hagyományos módon” keresnénk meg.

Annak igazolására, hogy az n-edik prímszám 2^{2^n}-nél kisebb, tekintsük az alábbi n darab számot :

$$2, 2+1, 2^2+1, 2^4+1, \ldots, 2^{2^{n-1}}+1. \tag{4}$$

Ha megmutatjuk, hogy ezek közül semelyik kettőnek nem lehet közös prímtényezője, készen vagyunk: a (4) alatti n darab szám mindegyike kisebb 2^{2^n}-nél, s mindegyiknek van az összes többi prímosztóitól különböző prímosztója. Így 2^{2^n} előtt legalább $n$prímszám van, vagyis az n-edik prím kisebb 2^{2^n}-nél.

Az viszont, hogy a (4) alatti számok páronként relatív prímek,egyszerűen következik abból, hogy az első kivételével az összes többi páratlan, továbbá az $a^2 - 1 = (a+1)(a1)$ összefüggés i-szeri alkalmazásával

$$2^{2^i} - 1 = (2^{2^{i=1}} + 1)(2^{2^{i=2}} + 1) \dots (2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1)(2 - 1).$$

Így $j < i$ esetén $2^{2^j} + 1$ összes prímosztója osztója $(2^{2^i} - 1)$-nek is, vagyis nem lehet osztója $(2^{2^1} + 1)$-nek.

Nem nehéz belátni azt sem, hogy az n-edik prím még 2^n-nél is kisebb, tehát (2)-ben $2^{2^n} - t$ mindkét helyen 2^n-re cserélhetnénk.