Kedvenc Problémáim

Havonta egy–egy, számomra valamilyen oknál fogva kedves feladatot mondok el. Ezek megoldása, noha a középiskolában oktatott ismeretanyagnál többet nem kíván, mégis mély, igazi matematikusi gondolkodást igényel. A problémákra a megjelenést követő számban megoldást adok, azonban nem kívánok egyetlen problémát sem teljesen lezárni. Akár a feladatokkal, akár megoldásával kapcsolatban minden megjegyzést örömmel veszek.

Csirmaz László

*

Tetszőleges x valós számra $[x]$ jelöli x egész részét, vagyis a legnagyobb olyan egészt, mely még nem nagyobb x-nél. Minden $t \geq 2$ természetes számra legyen

$$f(t) = \left[\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{t-1} \left[\frac{1}{1 + t - i \cdot [t/i]} \right]} \right],$$

továbbá ha $n \geq 1$ egész, akkor

$$g(n) = 1 + 2^{2^n} - \sum_{i=2}^{2^{2^n}} \left[\frac{f(i)}{1 + \left[\sum\limits_{j=2}^{i} \frac{n-1}{f(j)} \right]} \right].$$

Mármost a kérdés az: mit számít ki ez a „képlettel definiált" $g(n)$ függvény?

* * *

A híres négyszín–tétel azt mondja ki, hogy minden síkra (vagy gömbre) rajzolható térkép országai négy színnel kiszínezhetők úgy, hogy szomszédos országok különböző színűek legyenek. (Két ország szomszédos, ha közös határszakaszuk van.) Az alábbi állítás ennek a tételnek egy speciális esete, azonban van egy közvetlen, egyszerű bizonyítása is. A feladat: ezt a bizonyítást megtalálni.

Egy asztallapra átfedés nélkül egybevágó fehér korongokat ragasztottak fel. Bizonyítsuk be, hogy a korongok kiszínezhetők négy színnel úgy, hogy az egymással érintkező korongok különböző színűek legyenek!

*

Az állítást a korongok számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk be. A kezdő lépés triviális: ha az asztallapon 1, 2, 3, vagy 4 korong van, azok mindig kiszínezhetők a követelményeknek megfelelően.

Most tegyük fel, hogy az állítást már tudjuk mindazokra az esetekre, mikor az asztallapra $n-1$ korongot ragasztottak fel, ebből akarjuk bizonyítani az állítás helyességét n korong esetére. Állítjuk:

akárhogyan is helyeztük el a korongokat, mindig akad közöttük olyan, melyet legfeljebb három másik érint.

Ha ezt már beláttuk, készen vagyunk: az n korong közül ezt (vagy az egyik ilyet) elhagyva, a megmaradt $n-1$ korongot az indukciós feltevésünk értelmében kiszínezhetjük négy színnel úgy, hogy érintkező korongok különböző színűek legyenek. Az elhagyott n-edik korong legfeljebb három másikkal érintkezik, így azok színezésére legfeljebb három színt használtunk el. Az n-edik korongot a fel nem használt színek bármelyikével kifestve, a korongok megfelelő színezését kapjuk. A teljes indukció elve alapján ez a feladat állítását bizonyítja.

A dőlt betűs állítás bizonyítása maradt csak hátra. Válasszuk egységnek az egybevágó korongok átmérőit, s vegyünk fel egy olyan egyenest az asztallap síkjában, melynek nincs közös pontja az asztallappal (és így egyetlen koronggal sem). Toljuk el az egyenest önmagával párhuzamosan az asztal felé egészen addig, míg először megy át egy (vagy több) korong középpontján. Jelöljük az egyenesnek ezt a helyzetét e-vel. Az e-n legalább egy korongközéppont van, és az összes középpont e-nek ugyanarra a partjára esik. Az e-n található középpontok között két szélső van (vagy csak egy, ha e-n egyetlen ilyen található), ezek közül az egyik legyen P. Állítjuk, hogy a P középpontú korongot legfeljebb három másik érintheti.

Tegyük fel, hogy ez nem így van: legyen A, B, C, D négy érintő korong középpontja. Az összes korong egységnyi átmérőjű, ezért a PA, PB, PC, PD távolságok egységnyiek, tehát A, B, C, D rajta van a P középpontú egységnyi sugarú k körön. Ezt a k-t az e egyenes két félkörre vágja szét, és e választása miatt A, B, C, D ugyanarra a félkörre esik, mondjuk ebben a sorrendben.

Az A, B, C, D középpontú egységnyi átmérőjű köröknek nincs közös belső pontjuk, következésképp az $APB\sphericalangle$, $BPC\sphericalangle$, valamint $CPD\sphericalangle$ mind legalább $60°$-os. Tehát az $APD\sphericalangle$ legalább $180°$, s mivel A és D ugyanarra a félkörre esik, pontosan $180°$. Ez pedig lehetetlen, mert akkor A-nak és D-nek is az e egyenesre kellene esnie, s így P nem lenne az e-re eső középpontok között szélső.

Ezzel a dőlt betűs állítás bizonyítását (is) befejeztük.