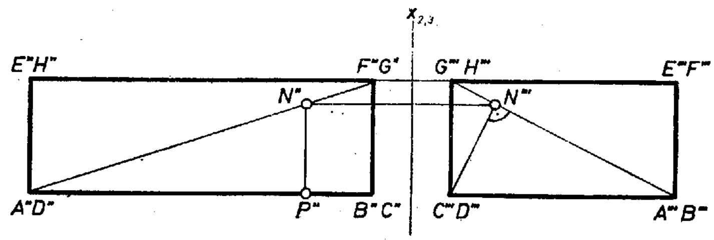
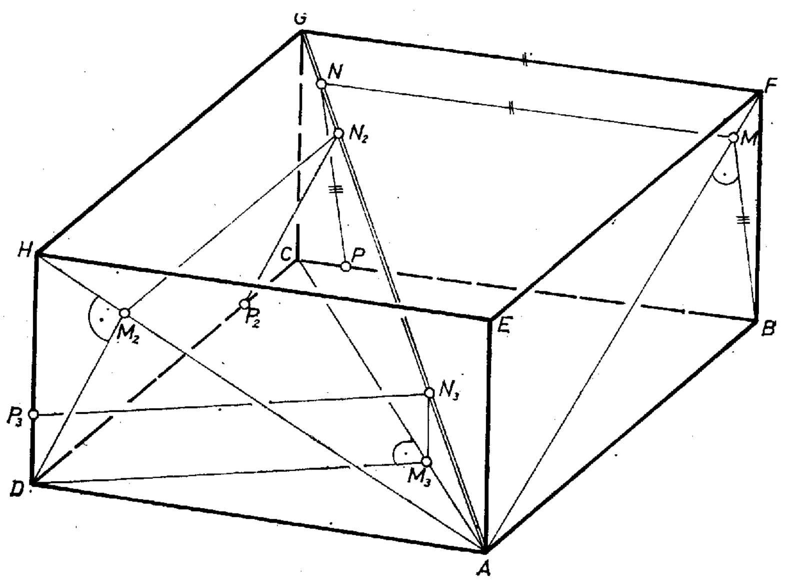
I. megoldás. 1. Lényegében az AG, BC kitérő egyenespár normáltranszverzálisának BC-n levő végpontját kell megszerkesztenünk, majd ezt ismételnünk, BC szerepére CD-t, végül DH-t véve. Ennek megoldását ismerjük a tankönyvből[1] olyan esetre, ha a két egyenes vetületeivel van megadva a Monge-féle képsíkrendszerben; a transzverzális képeit a képsíkrendszer (általában kétszeri) transzformációja és visszatranszformálás útján kapjuk meg.



1. ábra

Esetünkben könnyítést ad, hogy a téglatestnek rendre két-két lapsíkjából alakítva képsíkrendszerünket, a mozgó pont által bejárt élek kitüntetett helyzetűvé, vetítőegyenessé válnak, ezért már az eredeti képekből megkapjuk a normáltranszverzális végpontjait. Az eljárást két függőleges képsík (K_2 és K_3) alkalmazásával mutatja be az 1. ábra, az AG átló és a CD él (a 2. pályaszakasz) legrövidebb távolsága az NP (az alábbiak szerinti N_2P_2) szakasz.

Tetszetősebb azonban közvetlenül azt a meggondolást alkalmazni, amely az idézett eljárást készítette elő: AG-n át fölvesszük a BC-vel párhuzamos síkot – ez az AGF átlós sík, hiszen $GF \parallel CB$ (2. ábra) –, erre a síkra merőlegesen rávetítjük BC-t, a vetület AG-ből kimetszi a transzverzális N végpontját, végül ezt visszavetítve BC-re, kapjuk P-t, a BC pályaszakasznak AG-hez legközelebbi pontját.



2. ábra

A végrehajtás első lépésében elég BC-nek egy pontját vetíteni AGF-re mondjuk B-t, és legyen a vetület M –, hiszen így a vetület az M-en átmenő, GF-fel párhuzamos egyenes lesz; maga a BM egyenes merőlegesen áll egyrészt GF-re, tehát CB-re is, így benne lesz a B-n át CB-re merőlegesen álló BAF síkban, másrészt AF-re is, vagyis M a B vetülete AF-re. A mondott N metszéspont visszavetítése pedig a CBM síkban végezhető: $NP \parallel MB$, ismét azért, mert MB merőleges BC-re.

A 2. ábrán ugyanígy szerkesztettük a CD és DH pályaszakasz AG-től mért P_2N_2, ill. P_3N_3 távolságát az AGH, ill. AGC átlós sík felhasználásával. A 2. ábra szerkesztő vonalait vetületben szemlélve az 1. ábrát, ill. megfelelőit kapjuk, a különbözőség csak az, hogy az 1. ábra gépies lépéseihez hozzáfűztük a megfelelő gondolatot. Ezzel a kívánt számítást is előkészítettük.

2. Legyen $AB = a$, $AD = b$ és $AE = c$. Az alakzat hasonló derékszögű. háromszögeit felhasználva

$$\frac{BP}{BC} = \frac{MN}{FG} = \frac{AN}{AG} = \frac{AM}{AF} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AB}{AF} = \left(\frac{AB}{AF}\right)^2,$$

[1] *Czapáry E.–Gyapjas F.–Horvay Katalin–Pálmay L.*: Matematika a gimn… IV. o. számára, Tankönyvkiadó, Budapest 1969. a 171–177. oldalon.

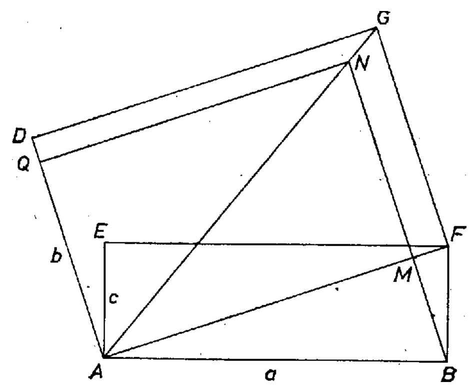
$$BP = \frac{a^2b}{a^2+c^2}, \quad CP = \frac{c^2b}{c^2+a^2}, \quad NP = MB = \frac{AB \cdot BF}{AF} = \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

A számadatokkal $BP = 1{,}8$, $NP = 0{,}949$ egység, és eredményeink kellő átbetűzésével $CP_2 = 0{,}6$, $N_2P_2 = 0{,}894$, $DP_3 = 4/13 = 0{,}308$, $N_3P_3 = 1{,}664$ egység (továbbá $AN = (9/10)\ AG = 3{,}368$, $AN_2 = 2{,}994$, $AN_3 = 1{,}151$).

Bartha Miklós (Szeged, JATE Ságvári E. Gyak., Gimn. IV. o. t.)

II. megoldás. Ha kiválasztjuk egy téglatest valamelyik testátlóját, ezzel a téglatest három lehetséges él iránya közül egyiket sem tüntettük ki. Bármelyik irányt vesszük is, a vele párhuzamos négy él közül kettő csatlakozik a választott testátlóhoz, kettő pedig kitérő hozzá viszonyítva, és e kettő a testátló felezőpontjára (a test szimmetriacentrumára) nézve tükrösen helyezkedik el. Elég tehát a BC éllel kapcsolatos teendőinket elvégezni, a másik két él esete ebből az élek szerepének alkalmas felcserélésével kapható meg.

Fektessünk át AG-n BC-vel párhuzamos S síkot: ez a téglatest $AFGD$ átlós síkja. A BC szakasz végpontjainak az S-en levő vetületét megkapjuk, ha B-t AF-re, C-t DG-re vetítjük. A vetületeket összekötő szakaszon vannak S-nek BC-hez legközelebb levő pontjai. Tehát ennek a szakasznak AG-vel alkotott metszéspontja van AG pontjai közül BC-hez legközelebb. Ezt az N metszéspontot BC-re visszavetítve kapjuk BC-nek AG-hez legközelebbi pontját. Ezzel a feladatot térbeli konstrukcióval megoldottuk. Megszerkeszthetjük a kérdéses szakaszok hosszát síkbeli szerkesztéssel is, ha adottak a téglatest oldalszakaszai.



3. ábra

Rajzoljuk meg először az $ABFE$ téglalapot, ennek AF átlója fölé pedig az $AFGD$ téglalapot. Az AF egyenesre merőleges, B-n átmenő egyenes metszi ki az AF, AG egyenesekből az M, N pontokat. N-et AD-re merőlegesen vetítve kapjuk P-nek AD-n levő Q vetületét. Az $AB = a$, $AD = b$, $AE = c$ jelölésekkel

$$BM^2 = AM \cdot MF = \frac{(AM \cdot AF)(MF \cdot AF)}{AF^2} = \frac{a^2c^2}{a^2+c^2},$$

$$AQ = \frac{AN}{AG} \cdot b = \frac{AM}{AF} \cdot b = \frac{AM \cdot AF}{AF^2} \cdot b = \frac{a^2b}{a^2+c^2}$$

ahonnan $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$ behelyettesítéssel az I. megoldásban közölt eredményekkel azonos számokat kapunk.