

$$(1) \quad 1 + \sin^2 cx = \cos x.$$

Látjuk, hogy az $x = 0$ szám tetszőleges c -re megoldása az egyenletnek. A feladat tehát azt megállapítani, hogy mely c értékekre nincs az egyenletnek 0-tól különböző megoldása.

Mivel $\sin^2 cx$ biztosan nemnegatív és $\cos x$ maximális értéke 1, azért (1) csak abban az esetben teljesülhet, ha

$$\sin^2 cx = 0 \quad \text{és} \quad \cos x = 1$$

egyszerre fennáll, vagyis

$$(2) \quad cx = k\pi, \quad \text{ahol } k \text{ egész szám}$$

$$(3) \quad x = 2m\pi, \quad \text{ahol } m \text{ egész szám.}$$

Amennyiben van az egyenletnek 0-tól különböző megoldása, akkor (3) szerint $m \neq 0$, és (3)-at (2)-be téve kapjuk, hogy

$$(4) \quad c = \frac{k}{2m},$$

azaz c racionális szám.

Ha viszont c racionális szám, akkor az egyenletnek van nem nulla megoldása is: ha $c = \frac{p}{q}$, akkor $x = 2q\pi$ kielégíti az egyenletet ($q \neq 0$, hiszen c nevezőjében szerepel):

$$1 + \sin^2 \left(\frac{p}{q} 2q\pi \right) = 1 + \sin^2(2p\pi) = 1 = \cos(2q\pi).$$

Így azt kaptuk, hogy az (1) egyenletnek akkor és csak akkor van nullától különböző megoldása, ha c racionális szám. Ebből következik, hogy egyetlen megoldás pontosan akkor van, ha c irracionális.

Horváth Mária (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Gimn., IV. o. t.)