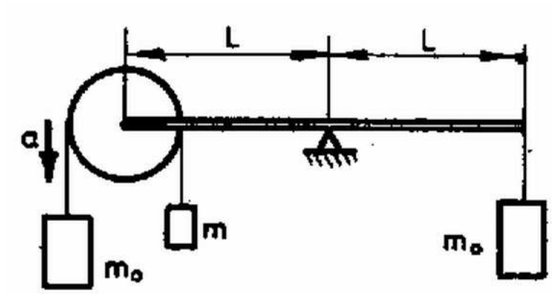
Az 1982. évi középiskolai tanulmányi verseny feladatai

Az I. forduló feladatai

1. *Egyenlőkarú emeld egyik végére elhanyagolható tömegű korong van csapágyazva (1. ábra). A korongról lelógó fonál végeire m_0 és m tömegű testeket akasztottunk. Az emelő végén m_0 tömegű test függ. Mekkora legyen a fonál másik végén függő test m tömege, hogy az emelőrúd vízszintes egyensúlyi helyzetben maradjon?*

(Párkányi László)



1. ábra

Megoldás. A fonálon függő, összesen $m_0 + m$ tömegű testeket $m_0 g - mg$ erő gyorsítja, ezért a gyorsulás:

$$a = g \cdot \frac{m_0 - m}{m_0 + m}.$$

A fonalakban ébredő erő

$$m_0(g - a) = m_0 g \cdot \frac{2m}{m_0 + m}.$$

A két fonálerő eredője ennek kétszerese, és ez tart egyensúlyt az emelő jobb oldali végén ható $m_0 g$ erővel:

$$\frac{4mm_0 g}{m_0 + m} = m_0 g.$$

Innen:

$$m = \frac{m_0}{3},$$

és a gyorsulás

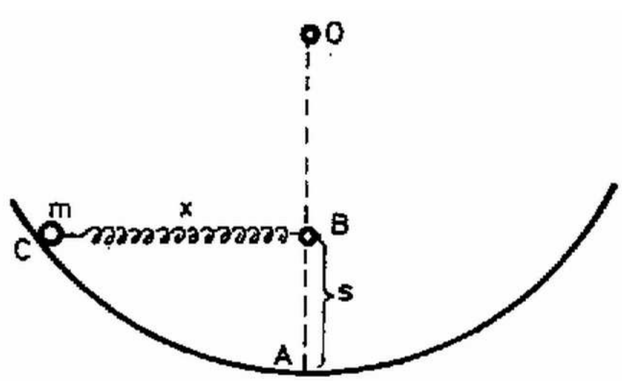
$$a = g/2.$$

2. *Egy körlejtő sugara $OA = 0{,}8$ méter hosszú. Középpontja alatt $OB = 0{,}48$ méter mélyen, a B pontban rögzítjük egy rugó egyik végét (2. ábra). A rugó eredeti hossza $L = 0{,}32\,\mathrm{m}$ és rugóállandója $D = 75\,\mathrm{N/m}$. A rugó másik végét vízszintesen kihúzzuk a lejtőn levő C pontig, itt egy $m = 3{,}2\,\mathrm{kg}$ tömegű testet akasztunk rá, és a testet elengedjük. A súrlódás elhanyagolható, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.*

a) *Mekkora sebességgel halad át a test a lejtő legalsó pontján?*

b) *Mekkora erő nyomja ekkor a lejtőt?*

(Vermes Miklós)



2. ábra

Megoldás. A lejtő legalján, az A pontban a rugó hossza az eredeti hosszúság, mert $s = AB = 0{,}32$ m, így itt nem marad a rugóban rugalmas energia. A súlyerő munkavégzésének és a rugó munkavégzésének az összege egyenlő a mozgási energiával:

$$mg \cdot s + (1/2)D(x-L)^2 = (1/2)mv^2,$$

ahol x a C pontig kihúzott rugó hossza, azaz a BC félhúr hossza, amely az adatokkal: $x = 0{,}64$ m.

Az adatokat behelyettesítve a sebesség $v = 2{,}97$ m/s.

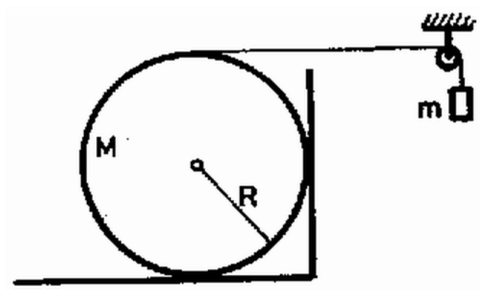
A legalsó helyzetben a rugó hossza egyenlő az eredeti L hosszúsággal, a lejtőre az mg súlyerő és mv^2/r középpont felé mutató erő hat:

$$F = mg + mv^2/r = 67{,}2 \text{ N}.$$

3. *Egy M tömegű, R sugarú henger ált egy szegletben (3. ábra). A hengerre csavart fonál egy kis csigán van átvetve és végéről m tömegű test lóg le. A μ csúszási súrlódási együttható a talajon és a falon ugyanakkora. Mekkora gyorsulással mozog a fonál végére akasztott test? Számadatok:*

$$\mu = 0{,}5,\ \ m = 11 \text{ kg},\ \ M = 8 \text{ kg},\ \ R = 0{,}4 \text{ m},\ \ g = 10 \text{ m/s}^2.$$

(Wiedemann László)



3. ábra

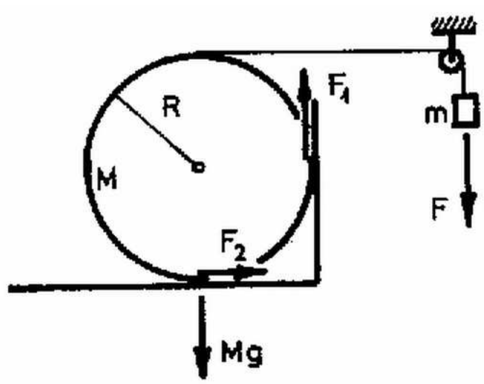
Megoldás. A m tömegű test a gyorsulással süllyed, tehát a fonálerő (4. ábra):

$$F = mg - ma.$$

A hengerre a fonálerő, a súlyerő és az F_1 és F_2 súrlódási erők hatnak, amelyekre igaz:

(1) $$F_1 = \mu(F + F_2),$$

(2) $$F_2 = \mu(Mg - F_1).$$



4. ábra

A henger szöggyorsulása $\beta = a/R$, a tehetetlenségi nyomatéka Θ. A henger mozgásegyenlete:

(3) $$FR - F_1R - F_2R = \Theta \cdot (a/R).$$

Az (1)–(3) egyenletrendszert kell megoldanunk. (1)-ből és (2)-ből következik,hogy

(4) $$F_1 = \frac{\mu(F + \mu Mg)}{1+\mu^2},$$

(5) $$F_2 = \frac{\mu(Mg - \mu F)}{1-\mu^2}.$$

(4)-et, (5)-öt és a fonálerő értékét behelyettesítve (3)-ba a gyorsulást kifejezhetjük:

$$a = g \cdot \frac{(m/M) \cdot (1-\mu+2\mu^2) - \mu(1+\mu)}{(m/M) \cdot (1-\mu+2\mu^2) + (1+\mu^2) \cdot \Theta/(MR^2)}.$$

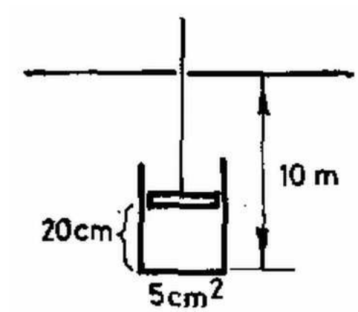
Számadatainkkal $a = 3{,}125\ \mathrm{m/s^2}$, $F_1 = 46{,}25$ N, $F_2 = 16{,}875$ N, $F = 75{,}625$ N.

A gyorsulás független a henger sugarától. Ha az a-ra kapott eredményt nullával tesszük egyenlővé, akkor megkapjuk annak feltételét, hogy a henger ne kezdjen forogni:

$$\frac{m}{M} = \frac{\mu(1+\mu)}{(1-\mu+2\mu^2)}.$$

4. *Egy* 160 g *tömegű,* 5 cm^2 *alapterületű, vékony falú hengert dugattyújához erősített fonálon úgy tartjuk víz alatt lógva, hogy feneke* 10 m*-re van a víz felszíne alatt (5. ábra). A hengerben a légoszlop hossza* 20 cm*. A fonalat lassan húzzuk felfelé. Milyen mélyen van a henger, amikor lebegni kezd? A légköri levegő nyomása* 10 $\mathrm{N/cm^2}$, $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$*; a dugattyú súrlódása elhanyagolható.*

(Vermes Miklós)



5. ábra

Megoldás. A henger és a dugattyú között a súrlódás elhanyagolható, tehát közöttük közvetlen erőhatás nincs. Ha valamely h mélységben a fonállal tartva nyugalomban van a rendszer, akkor a hengerre és a dugattyúra külön kell felírni az egyensúly feltételét.

A hengerre az mg súlyerő, a bezárt levegő pA nyomóereje, a p_l külső légnyomás és a víz hidrosztatikai nyomásából származó erő hat. Tehát az egyensúly feltétele:

(1) $$mg + pA = p_l A + h\varrho g A,$$

ahol h a henger aljának a felszíntől mért távolsága.

A dugattyú elhanyagolható tömegű, így az egyensúly feltétele a dugattyúra:

(2) $$F + pA = p_l A + (h-l)\varrho g A.$$

ahol F a fonálban ébredő erő, l pedig a h mélységben levő hengerbe bezárt levegő hossza. Az (1) egyenlet megadja a $p = p(h)$ függvényt. Ennek és a Boyle–Mariotte-törvénynek a segítségével az l-t kiszámíthatjuk, a kezdeti adatok ismeretében. (A kezdeti adatokat 0 indexszel jelöljük):

(3) $$l = \frac{p_0 l_0}{h\varrho g + p_l - (mg/A)}.$$

A lebegés megegyezik az $F = 0$ feltétellel, tehát abban a h mélységben lebeg a rendszer, ahol

(4) $$pA = p_l A + (h-l)\varrho g A.$$

Beírva ide a (3) összefüggést, a rendezés után kapjuk:

$$h\varrho g = \frac{p_0 l_0}{mg} \cdot A - p_0 + \frac{mg}{A}.$$

Behelyettesítve a $h_0 = 10$ m, $p_l = 10\ \mathrm{N/cm^2}$, $m = 160$ g, $l_0 = 20$ cm, $A = 5\ \mathrm{cm^2}$ és

$$p_0 = h_0 \varrho g + p_l - mg/A = 19{,}68\ \mathrm{N/cm^2}$$

értékeket,

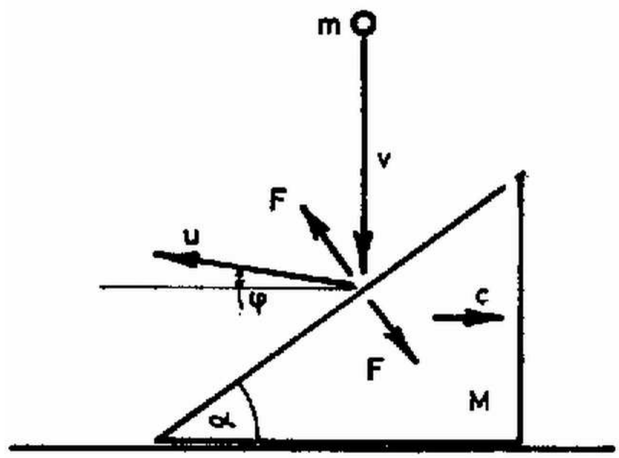
$$h = 2{,}62 \text{ m}$$

adódik.

A II. forduló feladatai

1. *Egy α hajlásszögű, M tömegű lejtő súrlódásmentesen mozoghat a vízszintes talajon (6. ábra). A nyugvó lejtőre függőlegesen ráejtünk egy m tömegű, v sebességű testet és ez rugalmasan ütközik a lejtővel. Mekkora u sebességgel és a vízszinteshez képest mekkora φ szögben hagyja el a test a lejtőt és mekkora c sebességre tesz szert a lejtő? Számadatok:* $\alpha = 37{,}87°$, $m = 6$ kg, $M = 18$ kg, $v = 14$ m/s.

(Légrádi Imre)



6. ábra

Megoldás. Hasson az ütközés során Δt ideig a lejtőre merőlegesen F erő. Ekkor a m tömegű test impulzusának a függőleges irányú megváltozása:

$$F \cdot \Delta t \cos\alpha = mu \sin\varphi - (-mv);$$

míg az m tömegű test impulzusának a vízszintes irányú megváltozása:

$$F \cdot \Delta t \sin\alpha = mu \cos\varphi.$$

A lejtő impulzusát az impulzusmegmaradás törvényéből kapjuk meg:

$$mu \cos\varphi = Mc.$$

Az energiamegmaradás törvénye szerint

$$mv^2/2 = (mu^2/2) + (Mc^2/2).$$

Vezessük be a $k = m/M$ jelölést és küszöböljük ki az $F\Delta t$ impulzusváltozást a fenti egyenletből. Ekkor a

(1) $$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi + \frac{v}{u\cos\varphi},$$

(2) $$ku\cos\varphi = c,$$

(3) $$kv^2 = ku^2 + c^2.$$

egyenletrendszert kapjuk. Ezt az egyenletrendszert kell megoldani φ-re, u-ra és c-re. Először (2)-ből kifejezzük c-t és (3)-ba helyettesítjük:

$$kv^2 = ku^2 + k^2u^2\cos^2\varphi,$$

innen az ismeretlen u:

(4) $$u = \frac{v}{\sqrt{1 + k\cos^2\varphi}}$$

u ezen értékét (1)-be helyettesítve egyenletet kapunk φ-re:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi + \frac{\sqrt{1 + k\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}.$$

A megfelelő trigonometriai összefüggések felhasználásával az eredmény a keresett φ szögre:

$$\operatorname{tg}\varphi = (1/2)\cdot[\operatorname{ctg}\alpha - (1+k)\operatorname{tg}\alpha].$$

Ez a szög független v-től. Ha φ megvan, (4)-ből kapjuk az u sebességet és (2)-ből c-t:

$$c = \frac{k\cos\varphi}{\sqrt{1+k\cos^2\varphi}}\cdot v.$$

Számadatainkkal $\sin\alpha = 3/5$, $\cos\alpha = 4/5$, $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$, $k = 1/3$. Az eredmény $\operatorname{tg}\varphi = 1/6 = 0{,}1667$, $\varphi = 9{,}46^\circ$, $u = 2\sqrt{37} = 12{,}166$ m/s, $c = 4$ m/s.

A visszapattanó test sebessége $43{,}67^\circ$-os szöget zár be a lejtő merőlegesével. Rögzített lejtő esetében ennek a szögnek is $36{,}87^\circ$-osnak kellett volna lennie.

2. *R sugarú henger két végére $r = R/3$ sugarú korongokat erősítünk (7. ábra). A hengert a korongokra feltekert fonalakra függesztjük és elengedjük. A henger palástján nyomdafestékes betűk vannak körös–körül elhelyezve. Az a feladatunk, hagy ezt a szöveget hibátlanul nyomtassuk le egy függőleges falra, amely mellett a henger mozog. Mekkora gyorsulással kell a fonál végét mozgatnunk? Az r sugarú korongok tömegétől eltekintünk.*

(Nagy László)

Megoldás. A hibátlan nyomtatáshoz szükséges, hogy a henger csúszás nélkül gördüljön a falon. Ennek érdekében a fonalat a kezünkkel a_x gyorsulással kell lefelé engednünk. Mozogjon a henger tengelye a gyorsulással lefelé. A mozgásegyenlet

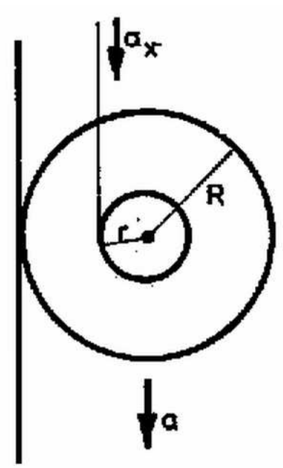
(1) $$mg - F = ma,$$

ahol F a fonálerő. Az Fr forgatónyomaték hatására a Θ tehetetlenségi nyomatékú henger β szöggyorsulással forog:

(2) $$Fr = \beta\Theta.$$

A henger kerületi gyorsulása

(3) $$a = a_x + \beta\cdot r.$$



7. ábra

A csúszás nélküli legördülés feltétele:

$$a = \beta R.$$

Az (1)–(4)egyenletrendszer megoldása:

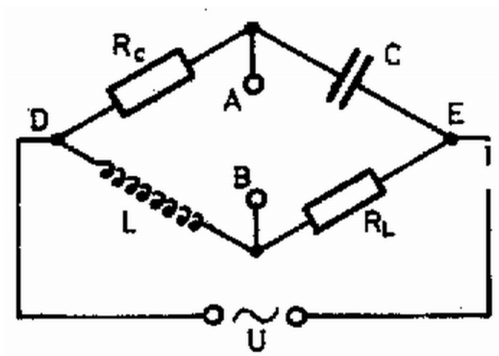
$$a_x = \frac{r(R-r)m}{\Theta + rRm}\cdot g,$$
$$F = \frac{mg}{1+(rRm/\Theta)},$$
$$\beta = \frac{mgr}{\Theta + rRm},$$
$$a = \frac{mrR}{\Theta + rRm}\cdot g.$$

Behelyettesítve a henger $\Theta = (1/2)mR^2$ tehetetlenségi nyomatékát és a megadott $r/R = 1/3$ sugárarányt, kapjuk, hogy $a_x = 4g/15$, $F = 0{,}6\,mg$, $\beta = 0{,}4\,g/R$. $a = 0{,}4\,g$.

Felmerülhet az a kérdés is, hogy a henger a túlsó oldalon levő falra nyomtassa le hibátlanul a szöveget. Ekkor a kötélvéget felfelé kell mozgatnunk a_y gyorsulással. Az egyenletrendszer az előbbihez hasonlóan alakul, az eredmény: $a_y = 8\,g/3$, $F = 3\,mg$, $\beta = 2\,g/R$, $a = 2\,g$.

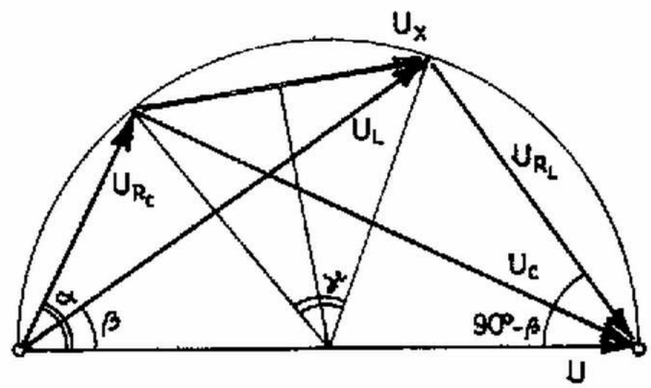
3. *Az L önindukciójú tekercs, C kapacitású kondenzátor és a két, egymással egyenlő $R_C = R_L = R$ ellenállás adott értékek a 8. ábra szerinti kapcsolásban. Mekkora az a legnagyobb feszültség, amely alkalmas frekvencia esetén A és B pontok között felléphet? Adatok:* a) $R = 1$ kΩ, $c = 0{,}1$ μF, $L = 0{,}1$ H; b) $R =$
$= 1$ kΩ, $C = 0{,}1$ μF, $L = 0{,}4$ H.

(Dr. Bodó Zalán)



8. ábra

Megoldás. A szokásos eljárás szerint ki kell számítani mindegyik ágban az áramerősség amplitúdóját és fázisát. Azután ki kell számítani ezek felhasználásával az AE és BE pontokra jutó feszültségkülönbségeket (mint az idő függvényeit) és ezek különbsége adja az AB között jelentkező U_x feszültséget.



9. ábra

Áttekinthetőbb a megoldás a feszültségek vektorábrája alapján (9. ábra). A felső ágban az adott U feszültség U_{R_C}-nek és U_C-nek az összege, U_{R_C}, és U_C merőleges egymásra, és így egy félkörbe rajzolható. Az alsó ágban ugyanaz az adott U feszültség U_L és U_{R_C} összege, U_L és U_{R_L} szintén merőlegesek egymásra, és berajzolhatók az előbbi félkörbe. Az ábrán levő szögekre írhatjuk:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{U_C}{U_{R_C}} = \frac{I_1/\omega C}{I_1 \cdot R} = \frac{1}{\omega CR},$$
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{U_{R_L}}{U_L} = \frac{I_2 R}{I_2 \omega_L} = \frac{R}{\omega L}.$$

I_1 és I_2 a felső, ill. az alsó ágban folyó áramot jelöli.

A keresett U_x feszültséget a derékszögek csúcsait összekötő vektor adja. Ugyanis a 8. ábra $D-A-B-E$ (vagy $D-B-A-E$) útján végigmenve is U a feszültség.

U_x akkor maximális, ha a hozzá tartozó γ középponti szög maximális, ez pedig $(\alpha-\beta)$ kétszerese.

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{[1/(\omega CR)] - [R/(\omega L)]}{1+[1/(\omega^2 LC)]} = \frac{1}{R}\cdot\frac{L-CR^2}{CL\omega + (1/\omega)}.$$

Ez a tört akkora legnagyobb, amikor a nevezője $y = CL\omega + (1/\omega)$ a legkisebb. Ennek feltétele:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\omega} = CL - \frac{1}{\omega^2} = 0 \quad \text{alapján} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

(Ekkor y valóban minimális.)
Ebben az esetben

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{R} \cdot \frac{L - CR^2}{2\sqrt{LC}}.$$

A keresett feszültség:

$$U_x = (U/2)g \sin(\gamma/2).$$

A vektorábrában U_x hajlásszöge a vízszinteshez adja a fázisszöget, amely a maximális feszültség esetében 0.

Számadatainkkal az a) esetben $L - CR^2 = 0$ és az AB pontok közötti feszültség bármely frekvenciánál 0, a b) esetben $\omega = 5000\ \mathrm{s}^{-1}$ és $U_x = 0{,}6\ U$.

Megadjuk az általános megoldás eredményét is:

$$U_x = \frac{R^2 - (L/C)}{\sqrt{[R^2 + (1/\omega C)^2] \cdot [R^2 + (\omega L)^2]}} \cdot U_0 \sin(\omega t + \varphi),$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R[1/(\omega C) - \omega L]}{R^2 + L/C}.$$

A III. kísérleti forduló

A versenyzőknek adott olaj belső súrlódási együtthatóját kellett meghatározniuk adott berendezés felhasználásával, továbbá meg kellett vizsgálni, hogy ez az együttható független-e a sebességtől, és hogyan függ a hőmérséklettől.

Az 1982. évi tanulmányi verseny eredménye

A fizikából nem tagozatos tanulók versenyében:

1. díj: *Szállási Zoltán* (Esztergom, Dobó Katalin Ginm. IV. o. t., tanára: Sípos Imre)
2. díj: *Károlyi Gyula* (Budapest, Fazekas M. Gimn. IV. o. t., tanára: Horváth Gábor)
3. díj: *Náray Miklós* (Budapest, I. István Gimn. III. o. t., tanára: Moór Ágnes)

A további helyezettek: 4. *Kiss Péter* (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn. IV. o. t., t.: Takács Jánosné), 5. *Tóth Gábor* (Budapest, Fazekas M. Gimn. III. o. t., t.: Horváth Gábor), 6. *Fodor Zoltán* (Budapest, Radnóti M. Gimn. III. o. t., t.: Tomcsányi Péter), 7. *Csörgő Tamás* (Gyöngyös, Berze N. J. Gimn. IV. o. t., t.: Kiss Lajos), 8. *Marth Gábor* (Budapest, Apáczai Cs. J. Gimn. III. o. t., t.: Holics László), 9. *Tardos Gábor* (Budapest, Berzsenyi D. Gimn. IV. o. t., t.: Apró Pál), 10. *Pázmándi Ferenc* (Debrecen, Tóth Á. Gimn. IV. o. t., t.: Kertész Béla).

Két feladat megoldásáért elsőfokú dicséretet kapott egyenlő helyezésben 12 tanuló, egy feladat megoldásáért másodfokú dicséretet kapott egyenlő helyezésben 21 tanuló.

A fizikából tagozatos tanulók versenyében:

1. díj: *Földiák Péter* (Budapest, Radnóti M. Gimn. IV. o. t., tanára: Rácz Mihály)
2. díj: *Tremmel János* (Szombathely, Nagy Lajos Gimn. IV. o. t., tanára: Rozmán Gyula)
3. díj: *Járosi Péter* (Dunaújváros, Münnich F. Gimn. IV. o. t., tanára: Kobzos Ferenc)

A további helyezettek: 4. *Mádi Zoltán* (Debrecen, Kossuth L. Gimn. IV. o. t., t.: Dudics Pál), 6. *Bacsó Zsolt* (Debrecen, Kossuth L. Gimn. IV. o. t., t.: Dudics Pál), 6. *Oszlányi Gábor* (Miskolc, Földes F. Gimn. IV. o. t., t.: Zámborszky Ferenc), 7. *Jeney Tamás* (Miskolc, Földes F. Gimn. IV. o. t., t.: Zámborszky Ferenc), 8. *Nagy Ervin* (Szombathely, Nagy Lajos Gimn. IV. o. t., t.: Karáth László), 9. *Trefán György* (Debrecen, Kossuth L. Gimn. IV. o. t., t.: Dudics Pál), 10. *Molnár Ferenc*(Dombóvár, Gőgös I. Gimn. IV. o. t., t.: Stettner Eleonóra).

Két feladat megoldásáért elsőfokú dicséretet kapott egyenlő helyezésben 7 tanuló, egy feladat megoldásáért másodfokú dicséretet kapott egyenlő helyezésben 23 tanuló.