

Jelöljük n tizes számrendszerbeli alakjában a jegyek számát k -val. Egészítsük ki képzeletben az n -nél kisebb számok tizes számrendszerbeli alakját k -jegyűvé úgy, hogy a hiányzó jegyek helyére 0-t írunk, és írjuk a sorozat elé a k db 0-val felírt 0-t. Jelöljük a közben leírt 0-k számát R_k -val. A kiegészítés után minden leírt számban k jegy van, tehát $(n+1)$ számban $(n+1)k$ a jegyek száma, és erre

$$(2) \quad Q_n + R_k = (n+1)k < n(k+1),$$

hiszen $k < n$, mihelyt $n > 1$.

A kiegészítés során az egyesek helyére egyetlen 0 jegyet írtunk, a tízesek helyére tíz 0-t írtunk, és így tovább, végül az első oszlopba, a 10^{k-1} értékű helyre 10^{k-1} -ig kellett 0-kat írni. Eszerint

$$R_k = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{k-1} = \frac{10^k - 1}{9},$$

tehát

$$(3) \quad 0 < R_k < \frac{10}{9} \cdot 10^{k-1} < 2n,$$

hiszen $n \geq 10^{k-1}$.

Jelöljük a kiegészítés után az összes 0 jegyek számát S_n -nel, a 10^{j-1} helyi értékű pozícióban levő 0-k számát $S_n(j)$ -vel. E jelölések definíciója szerint

$$(4) \quad \begin{aligned} P_n + R_k &= S_n, \\ S_n &= S_n(1) + S_n(2) + \dots + S_n(k). \end{aligned}$$

Az egyesek oszlopában egy 0 után kilenc 0-tól különböző jegy áll, és ez ciklikusan ismétlődik. Emiatt

$$n+1 \leq 10S_n(1) < n+10.$$

A tízesek oszlopában tíz db 0 után kilencven db 0-tól különböző jegy következik, és ez ciklikusan ismétlődik, tehát

$$n+1 \leq 10S_n(2) < n+100.$$

Általában a 10^{j-1} helyi értékű számjegyek sorozata 10^{j-1} db 0-val kezdődik; utánuk $9 \cdot 10^{j-1}$ db 0-tól különböző jegy következik, és ez ciklikusan ismétlődik, tehát

$$n+1 \leq 10S_n(j) < n+10^j.$$

Összegezve ezeket az egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy

$$kn < k(n+1) \leq 10S_n < kn + 10 \frac{10^k - 1}{9} < kn + \frac{10^2}{9} \cdot 10^{k-1} < (k+12)n.$$

Felhasználva a (3) és (4) összefüggéseket, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P_n &= S_n - R_k < \frac{k+12}{10} \cdot n, \\ P_n &= S_n - R_k > \frac{k}{10}n - 2n = \frac{k-20}{10} \cdot n. \end{aligned}$$

A (2) és (3) összefüggések szerint hasonlóan egyrészt

$$Q_n = (n+1)k - R_k > nk - 2n = (k-2)n,$$

másrészt

$$Q_n < (k+1)n.$$

Ezek alapján a P_n/Q_n hányadosra írhatunk fel korlátokat:

$$\frac{k-20}{k+1} \cdot \frac{1}{10} < \frac{P_n}{Q_n} < \frac{k+12}{k-2} \cdot \frac{1}{10}.$$

Itt mindkét oldal határértéke $1/10$, hiszen n -nel együtt k is tart a végtelenbe. Ez valóban így van, hiszen tetszőlegesen nagy A számhoz van olyan N , hogy $k \geq A$, minden N -nél nagyobb n természetes számra $-N$ szerepére ugyanis választhatjuk akármelyik $[A]$ -jegyű számot. – A feladat állítását ezzel bebizonyítottuk.